Bollettino U. M. I.
(7) 4-A (1990), 155-164

Su una ulteriore classe di equazioni ellittiche di tipo non variazionale a coefficienti discontinui.

MAURIZIO CHICCO (*)

Summary. – *Let L be a linear second order uniformly elliptic partial differential operator in non-divergence form. I prove that the Dirichlet problem $Lu = f$ a.e. in Ω, $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ (with f given in $L_2(\Omega)$) has one and only one solution u, provided the main coefficients a_{ij} of L have continuous restrictions to the hyperplanes $x_1 =$ constant, without necessarily being uniformly continuous in Ω.*

1. – Introduzione.

In un aperto limitato Ω, contenuto in $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 3)$, si considerano l'operatore uniformemente ellittico

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \tag{1}$$

e il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f \quad \text{q.o. in } \Omega\,, \\ u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \end{cases} \tag{2}$$

con f data in $L_2(\Omega)$. Come è noto, se i coefficienti a_{ij} di L si suppongono soltanto misurabili e limitati in Ω, non è detto che il problema (2) abbia una ed una sola soluzione, neppure facendo opportune ipotesi sui coefficienti b_i, c di L (vedi ad esempio [14], pp. 18-19). Occorre pertanto supporre i coefficienti a_{ij} continui in $\bar{\Omega}$ (Koševev [13], Chicco [3]), oppure soddisfacenti ad altre condizioni: vedi ad esempio Cordes [9], Miranda [15], [16], Iftimie [12] (e Chicco [8]), Franciosi-Fusco [10], Sharovskii [17], Viola [18], Brézis-Evans [1], Chicco [4], [7], eccetera.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del C.N.R. (gruppo G.N.A.F.A.) e dei gruppi di ricerca del M.P.I.

Scopo di questa nota è provare che se i coefficienti a_{ij} di L hanno restrizione (uniformemente) continua a (quasi) ogni iperpiano del tipo $x_1 = costante$, con modulo di continuità indipendente da x_1, allora il problema di Dirichlet (2) ha una ed una sola soluzione non appena $c \geqslant c_0$ con c_0 costante positiva. In altre parole, benchè si richieda la (uniforme) continuità dei coefficienti a_{ij} sui singoli iperpiani $x_1 = costante$, non è necessaria la continuità di essi passando da uno all'altro di tali iperpiani.

Per provare tale risultato, si riprende il metodo dimostrativo di [7], precisando il valore delle costanti in certe maggiorazioni *a priori*, e si conclude poi in analogia con quanto già fatto in [4] per il caso dei coefficienti a_{ij} continui in $\bar{\Omega}$.

Si può infine osservare che la suddetta ipotesi sui coefficienti a_{ij} non si può attenuare nel senso di supporre solo che la restrizione di essi a (quasi) ogni iperpiano $x_1 = costante$ sia continua, senza supporre che il modulo di continuità sia indipendente da x_1. Basta infatti considerare il già citato controesempio riportato da Ladyzhenskaya-Ural'tseva ([14], pp. 18-19).

2. - Notazioni ed ipotesi.

Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ con frontiera $\partial\Omega$ rappresentabile localmente come grafico di una funzione di classe C^2. Siano $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ ed esistano due costanti positive μ, ν tali che

$$(3) \qquad |a_{ij}| \leqslant \mu \quad \text{q.o. in } \Omega\,, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j \geqslant \nu |t|^2 \quad \text{q.o. in } \Omega$$

per ogni $t \in \boldsymbol{R}^n$. Siano poi $b_i \in L_p(\Omega)$ con $p > 2$ se $n = 2$, $p = n$ se $n \geqslant 3$; $c \in L_q(\Omega)$ con $q = 2$ se $n = 3$, $q > 2$ se $n = 4$, $q = n/2$ se $n \geqslant 5$.

Siano $H^{1,r}(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^{1,r}(\Omega)$ gli spazi di Banach sui reali ottenuti completando rispettivamente $C^\infty(\bar{\Omega})$, $C_0^\infty(\Omega)$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^{1,r}(\Omega)} = \|u\|_{L_r(\Omega} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_r(\Omega)} ;$$

sia $H^{2,}(\Omega)$ lo spazio ottenuto completando $C^2(\bar{\Omega})$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^{2,r}(\Omega)} = \|u\|_{L_r(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} \right\|_{L_r(\Omega)} .$$

Indicheremo per brevità $H^{1,2}(\Omega)$, $H_0^{1,2}(\Omega)$, $H^{2,2}(\Omega)$ rispettivamente con $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ (questi sono spazi di Hilbert). Per ulteriori proprietà di tali spazi, si rimanda ad esempio a [11].

Indichiamo con L l'operatore (1), mentre sia

$$L_0 = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j}. \tag{4}$$

Poniamo poi

$$u_x = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad u_{xx} = \left[\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Infine indicheremo nel seguito sistematicamente con $\|\cdot\|$ la norma in $L_2(\Omega)$, quando ciò non crea confusione.

3. – Lemmi preliminari.

Il risultato seguente è una leggera estensione di quanto provato in [7], p. 482. Si riporta la dimostrazione per completezza.

LEMMA 1. – *Oltre alle ipotesi indicate in precedenza, supponiamo che* $\nu \leqslant 1 \leqslant \mu$, $a_{11} = 1$ *q.o. in* Ω, $\partial a_{ij}/\partial x_k \in L_n(\Omega)$ *(nel senso delle distribuzioni) per ogni* i, j, k *con* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$, $2 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$. *Sia* $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$; *allora esiste una costante* K_1 *dipendente solo da* μ, ν, n *tale che*

$$\lambda \|(\alpha u)_x\|^2 + \|(\alpha u)_{xx}\|^2 \leqslant K_1 \Big\{ \|L_0(\alpha u) + \lambda \alpha u\|^2 + \tag{5}$$
$$+ \sum_{k=3}^{n} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i}^{k-1} (2 - \delta_{ij}) \int_\Omega \left| \frac{\partial(\alpha u)}{\partial x_k} \left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_i \, \partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_i \, \partial x_k} \right] \right| dx \Big\}$$

per ogni $\lambda \geqslant 0$ *e per ogni* $u \in H^2(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. – Cominciamo a provare la tesi per $n = 2$. Risulta:

$$\lambda \left\| \frac{\partial(\alpha u)}{\partial x_1} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_1^2} \right\|^2 = -\int \frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_1^2} \left[-\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_1^2} + \lambda u \right] dx = \tag{6}$$

$$= -\int_\Omega \frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_1^2} \left[L_0(\alpha u) + \lambda \alpha u + 2a_{12} \frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_1 \, \partial x_2} + a_{22} \frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_2^2} \right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_1^2} \right\|^2 + 2\|L_0(\alpha u) + \lambda u\|^2 + 6\mu^2 \left\| \frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right\|^2 + 2\mu^2 \left\| \frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_2^2} \right\|^2;$$

$$(7)\qquad \lambda\left\|\frac{\partial(\alpha u)}{\partial x_2}\right\|^2+\nu\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_i\,\partial x_2}\right\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_i\,\partial x_2}\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_j\,\partial x_2}\,dx-\lambda\int_\Omega \alpha u\,\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_2^2}\,dx=$$

$$=-\int_\Omega[L_0(\alpha u)+\lambda\alpha u]\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_2^2}\,dx\leqslant\frac{1}{2\nu}\|L_0(\alpha u)+\lambda\alpha u\|^2+\frac{\nu}{2}\left\|\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_2^2}\right\|^2.$$

Intanto dalla (7) si deduce

$$(8)\qquad (2\lambda/\nu)\left\|\frac{\partial(\alpha u)}{\partial x_2}\right\|^2+2\left\|\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_1\,\partial x_2}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_2^2}\right\|^2\leqslant$$
$$\leqslant(1/\nu^2)\|L_0(\alpha u)+\lambda\alpha u\|^2$$

e quindi, usando anche la (6):

$$(9)\qquad 2\lambda\left\|\frac{\partial(\alpha u)}{\partial x_1}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_1^2}\right\|^2\leqslant 6(1+\mu^2/\nu^2)\|L_0(\alpha u)+\lambda\alpha u\|^2\,.$$

Infine dalle (8), (9) si conclude, come si voleva:

$$(10)\qquad \lambda\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial(\alpha u)}{\partial x_i}\right\|^2+\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right\|^2\leqslant K_2\|L_0(\alpha u)+\lambda\alpha u\|^2$$

per ogni $u\in H^2(\Omega)$, $\alpha\in C_0^\infty(\Omega)$, $\lambda\geqslant 0$, e K_2 è una costante dipendente solo da μ, ν.

La tesi (5) testè provata per $n=2$ si dimostra poi per induzione su n esattamente come in [7]. Basta solo osservare che si può continuare a supporre $\lambda\geqslant 0$, e che si può aggiungere al primo membro della (8) di [7] il termine $\lambda\|\partial(\alpha u)/\partial x_n\|^2$. □

COROLLARIO. – *Siano soddisfatte le stesse ipotesi del lemma precedente, salvo il fatto che ora* $\alpha\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ *(anzichè* $\alpha\in C_0^\infty(\Omega)$*) e* $u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$*. Allora per ogni* $\varepsilon>0$ *esiste una costante* K_ε *(dipendente da* ε *e dalla frontiera di* Ω*) tale che, se il supporto di* α *ha diametro abbastanza piccolo, risulta*

$$(11)\qquad \lambda\|(\alpha u)_x\|^2+\|(\alpha u)_{xx}\|^2\leqslant K_1\Bigg\{\|L_0(\alpha u)+\lambda\alpha u\|^2+$$
$$+\sum_{k=3}^{n}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1}(2-\delta_{ij})\int_\Omega\left|\frac{\partial(\alpha u)}{\partial x_k}\left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_i\,\partial x_k}\right]\right|dx\Bigg\}+$$
$$+\varepsilon\|(\alpha u)_{xx}\|^2+K_\varepsilon\|u\|^2\,.$$

per ogni $\lambda \geqslant 0$, $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, *e* K_1 *è la stessa costante del lemma precedente (e quindi dipende solo da* μ, ν*).*

DIMOSTRAZIONE. – Basta considerare il caso in cui il supporto di α abbia intersezione non vuota con $\partial\Omega$. In questo caso si può procedere come in [18] per ricondursi al caso di frontiera piana (e parallela ad un piano coordinato), in modo da eliminare gli integrali del tipo

$$\int_{\partial\Omega} a_{ij} \frac{\partial(\alpha u)}{\partial x_n} \left[\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_i \partial x_j} N_n - \frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x_i \partial x_n} N_j \right] d\sigma \,. \tag{12}$$

(ove $N = (N_1, N_2, \ldots, N_n)$ è il versore alla normale esterna a $\partial\Omega$). In [18] si è provato che, fissato $\varepsilon > 0$, se il supporto di α ha diametro abbastanza piccolo (dipendente da ε e dalla frontiera di Ω), l'errore commesso cambiando le variabili (per eliminare gli integrali come (12)) non supera

$$\varepsilon \|(\alpha u)_{xx}\|^2 + K_\varepsilon \|(\alpha u)_{xx}\|^2 \,.$$

Di qui si deduce facilmente la tesi. □

TEOREMA 1. – *Supponiamo verificate le ipotesi del lemma* 1. *Allora esistono due costanti:* K_2, *dipendente solo da* n, μ, ν *e* K_3, *dipendente anche dai coefficienti di* L *e da* Ω, *tali che*

$$\lambda \|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 \leqslant K_2 \|Lu + \lambda u\|^2 + K_3 \|u\|^2 \tag{13}$$

per ogni $\lambda \geqslant 0$ *e per ogni* $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. – Per provare questo risultato occorre ricordare anche la disuguaglianza (vedi ad esempio [18]):

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_r} \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_t} \right| dx \leqslant \eta \|u_{xx}\|^2 + K_\eta \|u\|^2 \tag{14}$$

valida per ogni $\eta > 0$, $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$, $2 \leqslant j \leqslant$ $\leqslant k \leqslant n$; $r, s, t = 1, 2, \ldots, n$, ove K_η dipende da η, Ω e dai coefficienti di L.

Dalla (14), dal lemma 1 e dal corollario si ha intanto facilmente

$$\lambda \|(\alpha u_x)\|^2 + (\alpha u)_{xx}\|^2 \leqslant K_4 \|L(\alpha u) + \lambda \alpha u\|^2 + K_5 \|\alpha u\|^2 \tag{15}$$

con $\lambda \geqslant 0$, $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\alpha \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ avente supporto contenuto in Ω oppure diametro del supporto abbastanza piccolo, K_4 costante dipendente solo da n, μ, ν, K_5 costante dipendente anche da Ω e dai coefficienti di L.

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ funzioni del tipo che si possano inserire al posto di α nella (15) (quindi di classe $C_0^\infty(\Omega)$ oppure $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, ma tali che il loro supporto abbia diametro abbastanza piccolo). Supponiamo inoltre che:

a) $0 \leqslant \alpha_r \leqslant 1$ $(r = 1, 2, \ldots, k)$;

b) posto $A_r = \{x \in \boldsymbol{R}^n : \alpha_r(x) = 1\}$, sia $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{r=1} A_r$;

c) esista una costante $K(n)$, dipendente solo da n, tale che per ogni $x \in \boldsymbol{R}^n$ il numero delle funzioni α_r tali che $\alpha_r(x) \neq 0$ non superi $K(n)$.

È facile verificare (per la compattezza di $\bar{\Omega}$) che tali funzioni α_r $(r = 1, 2, \ldots, k)$ esistono. D'altronde vale la disuguaglianza (come subito si verifica)

$$\|L(\alpha_r u) + \lambda \alpha_r u\|^2 \leqslant 3\|\alpha_r(Lu + \lambda u)\|^2 + K_7(\|u_x\|^2 + \|u\|^2) \tag{16}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, ove K_7 è una costante dipendente da α_r, n, μ, b_i. Dalle (14), (15), (16) si deduce allora facilmente

$$\begin{aligned}
\lambda\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 &\leqslant \sum_{r=1}^{k} [\lambda\|(\alpha_r u)_x\|^2_{L_2(A_r)} + \|(\alpha_r u)_{xx}\|^2_{L_2(A_r)}] \leqslant \\
&\leqslant K_4 \sum_{r=1}^{k} [\|L(\alpha_r u) + \lambda \alpha_r u\|^2 + K_5\|\alpha_r u\|^2] \leqslant \\
&\leqslant 3K \sum_{r=1}^{k} \|\alpha_r(Lu + \lambda u)\|^2 + K(n)(K_5 + K_7)(\|u\|^2 + \|u_x\|^2) \leqslant \\
&\leqslant 3K_4 K(n)\|Lu + \lambda u\|^2 + K(n)(K_5 + K_7)(\|u_x\|^2 + \|u\|^2)
\end{aligned}$$

valida per ogni $\lambda \geqslant 0$ e ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Poichè le costanti K_4 e $K(n)$ dipendono solo da n, μ, ν, mentre K_5 e K_7 dipendono anche dai coefficienti di L e da Ω, il Teorema 1 è così dimostrato. □

TEOREMA 2. – *Sia ω: $\boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ una funzione crescente ed infinitesima per $t \to 0^+$ tale che, posto*

$$x' = (x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^{n-1}, \qquad x = (x_1, x') \in \boldsymbol{R}^n,$$

risulti

$$|a_{ij}(x_1, x') - a_{ij}(x_1, x'')| \leqslant \omega(|x' - x''|) \tag{17}$$

per ogni $(x_1, x'), (x_1, x'') \in \Omega$ *e ogni* i, j *con* $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. *Sia inoltre* $\nu \leqslant 1 \leqslant \mu$, $a_{11} = 1$ *q.o. in* Ω, *e valgano le altre ipotesi elencate nel paragrafo* 2.

Allora esistono due costanti K_8 *e* $\bar{\lambda}$, *di cui la prima dipende solo da* n, μ, ν *e la seconda anche dai coefficienti di* L *e da* Ω, *tali che risulti*

$$\|u_{xx}\| \leqslant K_8 \|Lu + \lambda u\| \tag{18}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ *e ogni* $\lambda \geqslant \bar{\lambda}$.

Dimostrazione. – Fissato $x_1 = a \in \boldsymbol{R}$ tale che esistano dei punti $(a, x') \in \Omega$, prolunghiamo la definizione dei coefficienti a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$ a tutto l'iperpiano $x_1 = a$ in modo tale che gli $a_{ij}(a, \cdot)$ siano continui in $\boldsymbol{R}^{n-1}$ (soddisfacendo le (17) per ogni $x', x'' \in \boldsymbol{R}^{n-1}$) e che valga la condizione di uniforme ellitticità (3) per ogni $t \in \boldsymbol{R}^n$ e ogni $x' \in \boldsymbol{R}^{n-1}$. Sia poi θ una funzione di classe $C^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1})$ tale che

$$\theta(x') = 0 \text{ per } |x'| \geqslant 1\,, \quad \int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} \theta(x')\, dx' = 1\,, \quad 0 \leqslant \theta(x') \leqslant 1 \text{ in } \boldsymbol{R}^{n-1}\,,$$

e per ogni $m \in \boldsymbol{N}$ poniamo $\theta_m(x') = m^n \theta(mx')$. Posto ancora

$$a_{ij}^{(m)}(a, x') = \int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} \theta_m(y')\, a_{ij}(a, x' - y')\, dy'$$
$$(m = 1, 2, \ldots;\ i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

è noto che tali funzioni $a_{ij}^{(m)}(a, \cdot)$ sono di classe $C^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1})$, mentre si verifica subito che

$$|a_{ij}(a, x') - a_{ij}^{(m)}(a, x')| \leqslant \omega(1/m) \tag{19}$$
$$(m = 1, 2, \ldots;\ i, j = 1, 2, \ldots, n-1;\ x' \in \boldsymbol{R}^{n-1})\,.$$

Potendosi ripetere tutto per ogni $x_1 \in \boldsymbol{R}$ per cui esiste qualche punto $(x_1, x') \in \Omega$, restano così definite le funzioni $a_{ij}^{(m)}(x_1, x')$ per ogni $(x_1, x') \in \Omega$. Per esse vale la (17); inoltre si può facilmente verificare che, fissato m, sono limitate le derivate $\partial a_{ij}^{(m)}/\partial x_k$ per ogni i, j, k tali che $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $2 \leqslant k \leqslant n$. Pertanto, posto, per ogni m naturale,

$$L^{(m)} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \tag{20}$$

tali operatori soddisfano alle ipotesi del Teorema 1. Risulta pertanto

$$\lambda \|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 \leqslant K_2 \|L^{(m)}u + \lambda u\|^2 + K_3^{(m)} \|u\|^2 \tag{21}$$

per ogni $\lambda \geqslant 0$ e ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, ove la costante K_2 dipende solo da n, μ, ν mentre $K_3^{(m)}$ dipende anche da m (essendo funzione dei coefficienti di $L^{(m)}$).

Per la (19) è possibile fissare m in modo che

$$\|Lu - L^{(m)}u\|^2 \leqslant (1/4K_2) \|u_{xx}\|^2 \qquad \forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\, ; \tag{22}$$

allora dalle (21), (22) si deduce

$$\lambda \|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 \leqslant 4K_2 \|Lu + \lambda u\|^2 + 2K_3^{(m)} \|u\|^2 \tag{23}$$

valida ancora per ogni $\lambda \geqslant 0$ e ogni u come in precedenza. Ricordando poi la nota disuguaglianza

$$\|u\|_{L_{2n/(n-2)}(\Omega)} \leqslant S \|u_x\|_{L^2(\Omega)}$$

ove $u \in H_0^1(\Omega)$ e S è una costante dipendente solo da n, si ottiene, tenendo anche presente la disuguaglianza di Hölder:

$$2K_3^{(m)} \|u\|^2 \leqslant \lambda \|u_x\|^2 \tag{24}$$

non appena $\lambda \geqslant \bar{\lambda} = 2K_3^{(m)} S^2 (\text{mis}\, \Omega)^{2/n}$. Scelto $\bar{\lambda}$ in questo modo, dalle (23), (24) segue la tesi (18) con $K_8 = 4K_2$, essendo K_2 la costante del Teorema 1. □

TEOREMA 3. – *Siano soddisfatte le ipotesi del Teorema 2 tranne* $a_{11} = 1$ *q.o. in* Ω. *Sia* $c \geqslant c_0$ *q.o. in* Ω, *con* c_0 *costante positiva. Allora il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{q.o. in } \Omega\,, \\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{25}$$

ha una ed una sola soluzione, qualunque sia f *data in* $L_2(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. – Posto

$$f' = f/a_{11}\,, \qquad a'_{ij} = a_{ij}/a_{11}\,, \qquad b'_i = b_i/a_{11}\,, \qquad c' = c/a_{11}\,,$$

$$L' = -\sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b'_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c' \tag{26}$$

si verifica facilmente che anche i coefficienti a'_{ij} di L' sono uniformemente continui su (quasi) ogni iperpiano del tipo $x_1 = costante$, cioè esiste una funzione $t \to \omega_1(t)$, crescente ed infinitesima per $t \to 0^+$, tale che

$$|a'_{ij}(x_1, x') - a'_{ij}(x_1, x'')| \leqslant \omega_1(|x' - x''|)$$

per ogni (x_1, x'), $(x_1, x'') \in \Omega$ e ogni i, j con $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Poichè risulta ovviamente $a'_{11} = 1$ in Ω, vale la tesi del Teorema 2 per l'operatore L'. Allora dalla (18) (con L' al posto di L) e dal metodo di prolungamento dei parametri si ha che il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} L'u + \lambda u = f' & \text{q.o. in } \Omega\,, \\ u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione, qualunque sia f' data in $L_2(\Omega)$, non appena sia $\lambda \geqslant \bar{\lambda}$ (dato dal Teorema 2). Si possono allora applicare i risultati della nota [6], essendo $c' \geqslant c_0/\mu > 0$ q.o. in Ω, ottenendo così che anche il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} L'u = f' & \text{q.o. in } \Omega\,, \\ u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \end{cases} \tag{27}$$

ha una ed una sola soluzione. Ma il problema (27) è palesemente equivalente, per le definizioni poste, al problema (25): la tesi è pertanto provata. □

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BRÉZIS - L. C. EVANS, *A variational inequality approach to the Bellman-Dirichlet equation for two elliptic operators*, Arch. Rational Mech. Anal., **71** (1979), 1-13.

[2] M. Chicco, *Equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo Cordes con termini di ordine inferiore*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **85** (1970), 347-356.

[3] M. Chicco, *Solvability of the Dirichlet problem in $H^{2,p}(\Omega)$ for a class of linear second order elliptic partial differential equations*, Boll. Un. Mat. Ital., (4) **4** (1971), 374-387.

[4] M. Chicco, *Dirichlet problem for a class of linear second order elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **92** (1972), 13-23.

[5] M. Chicco, *Regolarità e principio di massimo per le soluzioni di una classe di equazioni ellittiche a coefficienti discontinui*, Rend. Mat., (3) **2** (1982), 441-451.

[6] M. Chicco, *Osservazione sulla risolubilità del problema di Dirichlet per una classe di equazioni ellittiche a coefficienti discontinui*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **66** (1982), 137-141.

[7] M. Chicco, *Su una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine in forma non variazionale*, Boll. Un. Mat. Ital., (6) **4**-A (1985), 479-486.

[8] M. Chicco, *Sull'equazione ellittica di V. Iftimie*, Ricerche Mat., **36** suppl. (1987), 1-9.

[9] H. O. Cordes, *Zero order a priori estimates for solutions of elliptic differential equations*, Proc. Symp. Pure Math., **4** (1961), 157-166.

[10] M. Franciosi - N. Fusco, *A $W^{2,2}$ bound for a class of elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ricerche Mat., **31** (1982), 207-218.

[11] E. Gagliardo, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche Mat., **7** (1958), 102-137.

[12] V. Iftimie, *Sur le problème de Dirichlet pour les équations aux coefficients measurables*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **13** (1968), 1353-1360.

[13] A. I. Košelev, *A priori estimates in L^p and generalized solutions of elliptic equations and systems*, Amer. Math. Soc. Transl., (2) **20** (1962), 199-325.

[14] O. A. Ladyzhenskaya - N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York, 1968.

[15] C. Miranda, *Sulle equazioni ellittiche di tipo non variazionale a coefficienti discontinui*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **63** (1963), 353-386.

[16] C. Miranda, *Su una particolare equazioni ellittica del secondo ordine a coefficneti discontinui*, A. Stiint. Univ. « Al. I. Cusa » Jasi, Sect. I Mat. (N. S.), **11** B (1965), 209-215.

[17] A. A. Sharovskii, *On a second order elliptic equation with discontinuous coefficients*, Moscow Univ. Math. Bull., **24** (1969), 47-50.

[18] G. Viola, *Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti non regolari*, Rend. Mat., (7) **4** (1984), 617-632.

Istituto Matematico di Ingegneria, Università di Genova

Pervenuta in Redazione
il 14 aprile 1989