Premessa: Uso dei simboli [,] e [±].
Questi simboli di uso corrente possono significare la congiunzione logica "e" o la congiunzione logica "o" a seconda delle circostanze. Per esempio:

- La scrittura $k = 0, 1$ significa: $k = 0$ oppure $k = 1$.
- La scrittura $k \neq 0, 1$ significa: $k \neq 0$ e $k \neq 1$.
- La scrittura $k = \pm 1$ significa: $k = -1$ oppure $k = 1$.
- La scrittura $k \neq \pm 1$ significa: $k \neq -1$ e $k \neq 1$.

---

101. a. Scriviamo la matrice, usiamo come pivot per la prima incognita il numero incorniciato e riduciamo:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 + 3R_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{array}\right)$$

L'ultima equazione è proporzionale alla seconda e può essere eliminata. Il sistema è ridotto, ha due pivot e quindi ha $\underline{\infty^1 \text{ soluzioni}}$ dipendenti dall'incognita non pivotale z.
Per determinarle, riduciamo totalmente la matrice:

$$R_2 \to -1/2\, R_2 \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right) \quad R_1 \to R_1 - R_2 \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Il sistema è: $\begin{cases} x + z/2 & = & 1/2 \\ y - (3/2)z & = & 1/2 \end{cases}$ da cui le soluzioni: $\left(\dfrac{1-z}{2} , \dfrac{1+3z}{2} , z\right)$ $(z \in \mathbb{R})$

101. b. Scriviamo la matrice, usiamo come pivot per la prima incognita il numero incorniciato e riduciamo:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3/2} & 3/2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1 \end{array} \qquad R_3 \to R_3 + (1/2)R_2$$

Il sistema è ridotto, ha i 3 pivot incorniciati e quindi ha $\underline{\infty^1 \text{ soluzioni}}$ dipendenti dall'incognita non pivotale z.
Riduciamo totalmente iniziando con $R_3 \to 2/3\, R_3$:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_1 \to R_1 - R_3 \\ R_2 \to R_2 + R_3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} R_2 \to (-1/4)R_2 \\ R_1 \to R_1 - R_2 \end{array}$$

Pertanto le soluzioni sono: $\left(\dfrac{z}{2} , \dfrac{z}{2} , z , 1\right)$

101. c. La matrice dei coefficienti è una matrice 3×4 e, dato che l'incognita x ha tutti i coefficienti nulli, la riduciamo usando come primo pivot a_{22}:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Eliminando l'ultima riga, proporzionale alla seconda, il sistema è ridotto con due pivot ed ha quindi $\underline{\infty^2 \text{ soluzioni}}$ dipendenti dalle incognite non pivotali x e z. Si ricavano subito $t = 1/2$ e la y in funzione di z. Le soluzioni sono $(x , z , z , 1/2)$
Evidentemente l'incognita t dev'essere pivotale e, dato che si ha la relazione $y = z$, allora y e z non possono essere contemporaneamente non pivotali. Quindi l'unico altro modo di scrivere le soluzioni del sistema è quello di scegliere come incognite non pivotali x e y e scrivere quindi le soluzioni come $(x , y , y , 1/2)$.

101. d. Scriviamo la matrice del sistema; per ridurla occorre innanzitutto uno scambio di righe perché a_{11} è nullo e non può essere pivot. Possiamo eseguire $R_1 \leftrightarrow R_2$ e poi continuare:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) R_1 \leftrightarrow R_2 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

La seconda e la terza riga sono identiche, la quarta è proporzionale alla seconda, *ma solo per i coefficienti* e non per il termine noto, quindi il sistema non ha soluzioni. D'altra parte con $R_4 \to R_4 - 2R_2$ si otterrebbe l'equazione $0 = -2$.

101. e. La matrice del sistema si riduce con una sola operazione elementare:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - 3R_1 \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

La matrice è ridotta con 4 pivot e il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale u. Le soluzioni si ricavano subito e sono: $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, u-1, 7-u, u\right)$

101. f. Per ridurre la matrice occorrono uno scambio di righe e un'altra operazione elementare:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 \\ \updownarrow \\ R_2 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) R_3 \to R_3 - 2R_1 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Eliminando l'ultima equazione che è proporzionale alla seconda, il sistema è ridotto, ha due pivot e quindi ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali y e t. Le soluzioni si possono quindi scrivere come: $(2-2y-t\,,\ y\,,\ 1-2t\,,\ t)$.

È possibile usare ogni coppia di incognite, come incognite non pivotali tranne la coppia z, t, dato che si ha la relazione $z = 1-2t$. Le soluzioni si possono scrivere quindi in altri 4 modi usando le altre possibili coppie di incognite non pivotali:

$$\left(-2y+\frac{3+z}{2}\,,\ y\,,\ z\,,\ \frac{1-z}{2}\right) \quad \text{con } y, z \qquad \left(x\,,\ \frac{2-x-t}{2}\,,\ 1-2t\,,\ t\right) \quad \text{con } x, t$$

$$\left(x\,,\ \frac{3+z}{4}-\frac{x}{2}\,,\ z\,,\ \frac{1-z}{2}\right) \quad \text{con } x, z \qquad (x\,,\ y\,,\ -3+2x+4y\,,\ 2-x-2y) \quad \text{con } x, y$$

102. a. Riduciamo la matrice mediante l'algoritmo gaussiano standard, cosa possibile in quanto nessuno dei coefficienti dipende da k:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & k \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrr|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & k-1/2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrr|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_2 \to R_2 - (1/2)R_1 \\ R_3 \to R_3 - (1/2)R_1 \end{array} \qquad R_3 \to R_3 + R_2$$

Risulta subito chiaro che, se $k \neq 1$ il sistema non ha soluzioni, mentre, se $k = 1$, il sistema ha due pivot e quindi ∞^1 soluzioni.

102. b. Riduciamo la matrice mediante l'algoritmo standard di Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & k^2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & k^2-2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & k^2-1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3 - R_2$$

La matrice è ridotta con 3 pivot, qualunque valore assuma il parametro k, quindi il sistema ha *sempre* una e una sola soluzione.

102. c. Riduciamo la matrice mediante l'algoritmo standard di Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & k^2 & 2 & k+k^2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & k^2-2 & 1 & k+k^2-1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k+1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3 - R_1 \qquad R_3 \to R_3 - (k^2-1)R_2$$

Se $k^2 - 1 \neq 0$, se cioè $k \neq \pm 1$, la matrice è ridotta con 3 pivot e il sistema ha quindi una e una sola soluzione.

Se $k = 1$, l'ultima riga è $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$, quindi il sistema non ha soluzioni.

Se $k = -1$, l'ultima riga è $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, quindi il sistema è ridotto con due pivot e ha quindi ∞^1 soluzioni.

103. a. Se $k \neq 0, 1, -1$, allora k , $k^2 - 1$, $k + 1$ sono pivot e il sistema è chiaramente ridotto.

Se $k = 0$, la matrice è	Se $k = 1$, la matrice è	Se $k = -1$, la matrice è
$\left(\begin{array}{cccc\|c} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
e non è ridotta.	e non è ridotta.	ed è ridotta.

In conclusione il sistema è ridotto per ogni $k \neq 0, 1$.
Se $k \neq 0, 1, -1$ il sistema è ridotto, non ha un'equazione del tipo $0 = 1$ e ha tre pivot non nulli: $k^2, k^2 - 1, k + 1$, per cui ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale t e si trovano facilmente per sostituzione a partire dall'ultima equazione:

$$\left(\frac{1 + t - 2kt}{k^2} + \frac{1 + (1 - k)t}{k^2(k^2 - 1)} \, , \, \frac{-1 + (k - 1)t}{k^2 - 1} \, , \, (1 - k)t \, , \, t\right)$$

Se $k = 0$, riducendo con $R_2 \to R_2 + R_1$ e $R_3 \to R_3 + R_2$ si ottiene la matrice a lato. Il sistema è ora ridotto, non ha un'equazione del tipo $0 = 1$ e ha due pivot quindi ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali x e t e sono: $(x \, , \, 1 + t \, , \, t \, , \, t)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se $k = 1$, le due ultime equazioni del sistema sono : $\{z = -1 \; ; \; 2z = 0\}$. Il sistema è chiaramente incompatibile e non ha soluzioni.
Se $k = -1$ il sistema è ridotto, ha due pivot, non ha un'equazione del tipo $0 = 1$ per cui ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali y e t e sono $(-y - t - 1 \, , \, y \, , \, -1 \, , \, t)$

Conclusione:	Se $k \neq 0, 1, -1$	∞^1 soluzioni
	Se $k = 0$ o $k = -1$	∞^2 soluzioni
	Se $k = 1$	nessuna soluzione

103. b. Riduciamo la matrice completa del sistema mediante l'algoritmo di Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 2 & 1 & 0 \\ k & 1 & k+3 & k+3 & 1 \\ k & 1 & 2 & k^2 & 1+k \\ 0 & 0 & k+1 & k+2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-1 & 1+k \\ 0 & 0 & k+1 & k+2 & 1 \end{array}\right)$$

Se eliminiamo R_4 che coincide con R_2, il sistema è ridotto purché $k \neq 0$, $k+1 \neq 0$, $k^2-1 \neq 0$, cioè $k \neq 0, 1, -1$.
Per $k \neq 0, 1, -1$ il sistema ha tre equazioni significative e quindi ∞^1 soluzioni che si possono trovare con le seguenti operazioni:
$R_3 \to R_3/(k+1)$ (possibile perché $k \neq -1$), da cui $t = 1/(k-1)$. Sostituendo questo valore in R_2 si ottiene: $z = -3/(k^2-1)$. L'incognita y è non pivotale, per cui rimane come parametro libero. Sostituendo i valori trovati di y, z, t in R_1 si ottiene infine: $x = \dfrac{-(k^2 - 1)y + 5 - k}{k(k^2 - 1)}$.

Quindi le soluzioni per $k \neq 0, 1, -1$ sono: $\left(\dfrac{-(k^2 - 1)y + 5 - k}{k(k^2 - 1)} \, , \, y \, , \, \dfrac{-3}{k^2 - 1} \, , \, \dfrac{1}{k - 1}\right)$

Esaminiamo ora i casi particolari:

Se $k = 0$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$ È chiaro che il sistema è ridotto con x incognita non pivotale per cui ci sono ∞^1 soluzioni che si ricavano facilmente: $(x \, , \, -5 \, , \, 3 \, , \, -1)$.

Se $k = 1$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ Il sistema è ridotto e, dato che l'ultima equazione è $0 \cdot t = 2$, allora non ha soluzioni.

Se $k = -1$: $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Il sistema è ridotto e ha solo due righe significative, pertanto ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali y, z e sono: $(-y - 2z - 1 \, , \, y \, , \, z \, , \, 1)$

103. c. Evidentemente, se $k-1\neq 0$, il sistema non è ridotto. Mentre se $k=1$ il sistema lo è. Un'operazione elementare che si può eseguire per qualunque $k\in\mathbb{R}$ è $R_3\to R_3-(k-1)R_2$. La matrice completa del sistema è in questo caso quella a lato.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & k^2-4 & 2-k & 1\end{array}\right)$$

Se i due numeri k, k^2-4 sono diversi da 0, cioè se $k\neq 0,2,-2$, la matrice è ridotta con tre pivot: $k,1,k^2-4$.

Quindi per $k\neq 0,2,-2$ (anche per $k=1$) il sistema ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale t. Le soluzioni si ricavano facilmente dal sistema ridotto:

$$\begin{cases} kx+y+2t & = 1\\ y+2t & = 0\\ (k^2-4)z+(2-k)t & = 1\end{cases} \qquad \left(\frac{1}{k}\,,\ -2t\,,\ \frac{1-(2-k)t}{k^2-4}\,,\ t\right)$$

Sostituendo uno alla volta i tre valori esclusi $k=0,2,-2$, si vede subito che il sistema è ridotto anche per $k=2$ e per $k=-2$, ma non per $k=0$.

Se $k=2$ il sistema non ha soluzioni perché l'ultima riga è $(0\quad 0\quad 0\quad 0\mid 1)$

Se $k=-2$ la matrice è quella a lato. È ridotta, ha tre pivot e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale z.

Le soluzioni sono immediate e sono: $\left(-\frac{1}{2}\,,\ -\frac{1}{2}\,,\ z\,,\ \frac{1}{4}\right)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1\end{array}\right)$$

Sostituiamo ora $k=0$ e continuiamo la riduzione:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1\end{array}\right) \begin{array}{c} R_2\to R_2-R_1\\ R_2\leftrightarrow R_3\end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)$$

Il sistema è ora ridotto ed evidentemente non ha soluzioni.

In conclusione: Per $k=0,2$ non ha soluzioni, per gli altri k ne ha ∞^1.

104. a. Scriviamo la matrice. Per ridurla conviene innanzitutto scambiare le due righe in modo da avere un pivot non dipendente da k.

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & -1 & 1\\ 1 & -4k & 2\end{array}\right) R_1\leftrightarrow R_2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4k & 2\\ k & -1 & 1\end{array}\right) R_2\to R_2-kR_1 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4k & 2\\ 0 & 4k^2-1 & 1-2k\end{array}\right)$$

Se $4k^2-1\neq 0$, se cioè $k\neq \pm 1/2$, allora la matrice è ridotta e ha due pivot, quindi il sistema ha una soluzione.

Se $k=1/2$ l'ultima riga è $(0\quad 0\mid 0)$ e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale y.

Se $k=-1/2$ l'ultima riga è $(0\quad 0\mid 2)$ e quindi il sistema non ha soluzioni.

104. b. Scriviamo la matrice. L'operazione $R_2\to R_2-R_1$ si può sempre fare, anche se $k=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 1\\ k & -1 & k & -1\end{array}\right) R_2\to R_2-R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & k+1 & -2\end{array}\right)$$

Se $k\neq 0$ la matrice è ridotta con due pivot e il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale z.

Se $k=0$ la matrice non è ridotta, ma la si riduce subito con $R_2\to R_2+2R_1$. L'ultima riga diventa $(0\quad 0\quad -1\mid 2)$, quindi la matrice è ridotta con due pivot. Il sistema ha quindi ∞^1 soluzioni dipendenti però dall'incognita non pivotale x.

In conclusione il sistema ha sempre ∞^1 soluzioni.

104. c. Scriviamo la matrice. L'operazione $R_2\to R_2-R_1$ si può sempre fare, anche se $k=0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & 2k & k\\ k & 1 & 1-k\end{array}\right) R_2\to R_2-R_1 \left(\begin{array}{cc|c} k & 2k & k\\ 0 & 1-2k & 1-2k\end{array}\right)$$

Se $k\neq 0,1/2$ la matrice è ridotta con due pivot e il sistema ha quindi una soluzione.

Se $k=0$ il sistema si riduce all'unica equazione $y=1$ e ha quindi le ∞^1 soluzioni $(x,1)$.

Se $k=1/2$ l'ultima equazione è non significativa, il sistema si riduce all'unica equazione $(1/2)x+y=1/2$ e ha quindi ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale y.

In conclusione il sistema ha ∞^1 soluzioni se $k=0,1/2$, altrimenti ne ha una.

105. a. Dato che tutti i coefficienti dell'incognita x dipendono da k, conviene scambiare l'ordine delle incognite in modo da semplificare l'algoritmo gaussiano.

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & 1 & -1 \\ 1+k & 1 & k \\ 3-k & 0 & 2k-1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & -1 \\ 1 & 1+k & k \\ 0 & 3-k & 2k-1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 3-k & 2k-1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & k^2-4 \end{array}\right)$$

$$C_1 \leftrightarrow C_2 \qquad R_2 \to R_2 - R_1 \qquad R_3 \to R_3 - (3-k)R_2$$

La matrice è ridotta con 2 pivot, indipendenti da k, ma a causa dell'ultima equazione, ha soluzioni (ne ha una sola) solo se $k = \pm 2$.

Osserviamo che, dovendola trovare, occorre tener conto che la prima incognita è ora la y e la seconda è la x.

105. b. Anche qui, dato che tutti i coefficienti dell'incognita x dipendono da k, può convenire scambiare l'incognita x con la z. Occorrerà poi scambiare due righe per avere un pivot non nullo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 0 & 1 \\ 2 & k+1 & 1 & 1 \\ k & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & k & 4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 3 & k & 4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 2-k & k-2 & 3 \end{array}\right)$$

$$C_1 \leftrightarrow C_3 \qquad R_1 \leftrightarrow R_2 \qquad R_3 \to R_3 - R_1$$

Mediante l'operazione elementare $R_3 \to R_3 - (2-k)R_2$ la matrice diventa quella lato. Dato che l'elemento a_{33} si annulla per $k = 2, -1$, allora:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & k & 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & k^2-k-2 & k+1 \end{array}\right)$$

Se $k \neq 2, -1$ la matrice è ridotta con tre pivot quindi il sistema ha una soluzione.

Se $k = 2$, l'ultima riga diventa $(0 \quad 0 \quad 0 \mid 3)$, e quindi il sistema non ha soluzioni.

Se $k = -1$, l'ultima riga diventa $(0 \quad 0 \quad 0 \mid 0)$, la matrice è ridotta con due pivot e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale x (e non z, ricordiamo che c'è stato uno scambio di colonne). Conclusione:

Se $k \neq 2, -1$ 1 soluzione Se $k = 2$ nessuna soluzione Se $k = -1$ ∞^1 soluzioni

105. c. Per ridurre la matrice conviene innanzitutto scambiare R_1 con R_2 in modo da avere un pivot non dipendente da k.

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \qquad \begin{array}{c} R_2 \to R_2 + kR_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & k+1 & 0 \\ -1 & k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & k-1 & -k \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 0 & 1 \\ k & -1 & k+1 & 0 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & k-1 & -k \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 0 & 1 \\ 0 & -1+k^2 & k+1 & k \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 & 1-k \end{array}\right)$$

Ora conviene eseguire $R_2 \leftrightarrow R_3$ in modo da semplificare la successiva operazione elementare.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 0 & -1+k^2 & k+1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 & 1-k \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 \to R_3 - (k+1)R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -k-1 & -1 \\ 0 & 0 & k-3 & -k \end{array}\right)$$

A questo punto può non convenire più ridurre del tutto la matrice, ma confrontare invece le ultime due equazioni che si scrivono (se $k \neq -1, 3$) : $\left\{ z = \dfrac{1}{k+1} \ ; \ z = \dfrac{-k}{k-3} \right\}$. Perché ci siano soluzioni quindi è necessario che $\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{-k}{k-3}$, cioè che $k^2 + 2k - 3 = 0$ ovvero $k = -3, 1$. Se k non è uno di questi due valori, il sistema è comunque senza soluzioni (anche se $k = -1$ o $k = 3$, come si verifica subito). Restano da esaminare i due casi $k = -3, 1$:

Se $k = 1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^1 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Se $k = -3$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente una soluzione.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

Riassumendo: Se $k \neq 1, -3$ non c'è nessuna soluzione, se $k = 1$ ci sono ∞^1 soluzioni, se $k = -3$ c'è una soluzione.

106. a. Basta ridurre la matrice dei coefficienti, iniziando con uno scambio di righe per evitare che il pivot dipenda da k.

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & -2 \end{pmatrix} \quad \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\quad} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 0 \\ 1 & k & -2 \end{pmatrix} \quad \underset{\substack{R_2 \to R_2 - kR_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{\quad} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & k & -3 \end{pmatrix} \quad \underset{R_3 \to R_3 - kR_1}{\quad} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & -3+k^2 \end{pmatrix}$$

I pivot sono due se $k^2 \neq 3$ e sono tre in caso contrario, quindi:
Se $k = \pm\sqrt{3}$ ci sono ∞^1 soluzioni non banali, altrimenti c'è solo la soluzione banale.

b. Riduciamo iniziando con uno scambio di righe per evitare che il pivot dipenda da k.

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ k & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_1 \\ \updownarrow \\ R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ k & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_2 \to R_2 - kR_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - kR_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+k & 1 & 1-k \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3+k & 2 & -k \end{pmatrix}$$

È possibile proseguire la riduzione, ma si può anche notare che $R_4 = R_2 + R_3$, per cui R_4 può essere eliminata. Dato che ci sono meno di quattro pivot, allora c'è sempre almeno un'incognita non pivotale, quindi il sistema ha sempre almeno ∞^1 soluzioni e quindi anche soluzioni non banali. Per sapere anche quante sono, scambiamo R_2 con R_3. Si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1+k & 1 & 1-k \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - \frac{1+k}{2} R_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & (1-k)/2 & (3-k)/2 \end{pmatrix}$$

Se $k \neq 1$ allora ci sono tre pivot, se $k = 1$ anche , quindi il sistema ha sempre ∞^1 soluzioni.

c. Il sistema ha sempre soluzioni non banali perché non può avere più di due pivot e quindi ci sono almeno 5 incognite non pivotali. Per sapere quante sono riduciamo la matrice con $R_2 \to R_2 - kR_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ k & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1+k^2 & 1-k & 1-k & -2+2k & 1-k & 1-k \end{pmatrix}$$

Se $k^2 \neq 1$, allora ci sono 2 pivot.
Se $k = -1$, ci sono sempre 2 pivot.
Se $k = 1$, la seconda riga è nulla e c'è un'unico pivot.
In conclusione: se $k = 1$ ci sono ∞^6 soluzioni, se $k \neq 1$ ce ne sono ∞^5.

107. Riduciamo la matrice completa con $R_3 \to R_3 - R_2$: $\left(\begin{array}{cccc|c} ab & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & b+1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a(b-1) & 0 & b-a \end{array}\right)$

Quindi se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $b \neq 1$ e $b \neq -1$, il sistema è ridotto con tre pivot e ha una soluzione.

Esaminiamo il caso $a = 0$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & b+1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$

A causa dell'ultima equazione il sistema può aver soluzioni solo se $b = 0$. Ma, se $b = 0$, sono incompatibili le prime due. Quindi per $a = 0$ il sistema non ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.

Esaminiamo ora il caso $b = 0$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 0 & -a \end{array}\right)$. Se $a = 1$, le prime due equazioni sono identiche. Eliminandone una, il sistema è ridotto, con due pivot, quindi ha ∞^2 soluzioni. Se invece $a \neq 1$ le prime due equazioni sono incompatibili e il sistema non ha soluzioni.

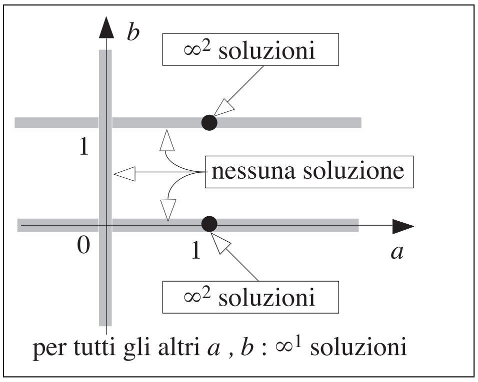
Esaminiamo ora il caso $b = 1$: $\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a \end{array}\right)$

Se $a \neq 0$, il sistema è ridotto, ma, a causa dell'ultima equazione, non ha soluzioni, tranne che nel caso $a = 1$, per cui è ridotto con due pivot e ha quindi ∞^2 soluzioni.
Se $a = 0$, non è ridotto, ma, come abbiamo già visto, non ha soluzioni.

Esaminiamo ora il caso $b = -1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -a & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -2a & 0 & -1-a \end{array}\right)$$

Se $a \neq 0$, con $R_2 \leftrightarrow R_3$ diventa ridotta con tre pivot e il sistema ha perciò ∞^1 soluzioni.
Se $a = 0$, come abbiamo già visto, il sistema non ha soluzioni.
La situazione può essere schematizzata nel disegno al lato nel piano cartesiano $[a, b]$, in cui per ogni coppia di valori (a, b) è segnata la situazione.



Per quanto riguarda l'ultima domanda, come si vede:

- Se $a = 0$ il sistema non ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.
- Se $a = 1$ il sistema ha sempre soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.

E questi sono gli unici valori di a che soddisfino i criteri richiesti.

111.

	A	B	C	D	E	F
A	no	no	sì	sì	no	no
B	sì	sì	no	no	sì	no
C	no	no	sì	sì	no	no
D	no	no	no	no	no	no
E	no	no	no	no	no	sì
F	sì	sì	no	no	sì	no

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad A \cdot D = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 13 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 13 & 5 & -8 & 1 \end{pmatrix} \qquad B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} \; C \cdot C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; C \cdot D = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 7 & 9 \\ 9 & 13 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; E \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$F \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad F \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad F \cdot E = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$$

112. a. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b. Falso. Controesempio: A e B come in a.

c. Falso. Controesempio: Se $A \cdot B = B$, allora $A \cdot B - B = 0$ che si può scrivere $A \cdot B - I \cdot B = 0$ cioè $(A - I) \cdot B = 0$. Basta quindi determinare due matrici non nulle il cui prodotto sia 0. Per esempio quelle di a.
Scegliamo quindi $A - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, cioè $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Allora $A \cdot B = B$ e ovviamente A non è la matrice identica.

d. Vero. Come è noto, la somma è commutativa.

e. Vero. È la distributività del prodotto rispetto alla somma.

f. Falso. Controesempio: A e B come in a. e $C = 0$.

g. Vero. Basta aggiungere $-A$ ad entrambi i membri dell'equazione.

h. Vero. È una semplice verifica immediata.

i. Vero. Infatti: $A \cdot A^2 = A \cdot (A \cdot A) = (A \cdot A) \cdot A = A^2 \cdot A$.

j. Falso. Controesempio: A e B come in a. , dato che $(A + B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$ e $A \cdot B \neq B \cdot A$.

k. Falso. Dato che $(A \cdot B)^2 = A \cdot B \cdot A \cdot B = A \cdot (B \cdot A) \cdot B$, mentre $A^2 B^2 = A \cdot A \cdot B \cdot B = A \cdot (A \cdot B) \cdot B$. Occorre quindi scegliere due matrici A e B tali che $A \cdot B \neq B \cdot A$. Le due matrici del caso a, però non vanno bene, perché $A \cdot B = 0$ e quindi si ha l'identità. Però scambiandole e scegliendo quindi le due matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ si ha, come si verifica eseguendo i prodotti, un controesempio.

l. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

m. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

n. Vero. Infatti, in questo caso A è l'inversa di sé stessa.

o. Falso. Controesempio: A e B come in a. , dato che $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - A\cdot B + B\cdot A + B^2$ e $A\cdot B \neq B\cdot A$.

p. Vero. Infatti $(A+I)\cdot(A-I) = A^2 - A\cdot I + I\cdot A + I^2$ e, diversamente dal caso precedente, A e I commutano.

113. a. Vero. Infatti: $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.

b. Falso. Controesempio: $A = I$ e $B = -I$.

c. Vero. Se infatti $A\cdot B = A\cdot C$, allora $A^{-1}\cdot A\cdot B = A^{-1}\cdot A\cdot C$ da cui $B = C$.

d. Falso. Per esempio:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Allora: $(A\cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1}\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

e. Falso. Controesempio: A e B come in d.

f. Falso. Si ha:
$$(A^{-1}BA)^5 = \overbrace{(A^{-1}BA)\cdots(A^{-1}BA)}^{5\text{ volte}} = A^{-1}B(A\cdot A^{-1})B(A\cdot A^{-1})\cdots BA =$$
$$= A^{-1}BB\cdots BA = A^{-1}B^5A.$$
Se fosse $(A^{-1}BA)^5 = A^{-5}B^5A^5$ si avrebbe quindi $A^{-1}B^5A = A^{-5}B^5A^5$. Moltiplicando a sinistra per A^5 e a destra per A^{-1} si ottiene:
$A^5\cdot A^{-1}B^5\cdot A\cdot A^{-1} = A^5\cdot A^{-5}\cdot B^5\cdot A^5\cdot A^{-1}$ da cui $A^4\cdot B^5 = B^5A^4$.
Per avere un controesempio, bastano quindi due matrici A e B tali che A^4 e B^5 non commutino, per esempio A e B come in d.

g. Vero. Per la dimostrazione confronta f.

h. Vero. Infatti A e B^{-1} sono invertibili e il prodotto di matrici invertibili è invertibile.

i. Falso. Come controesempio scegliamo A e B come in d. e poniamo $C = A\cdot B$. Allora si ha che $B = A^{-1}\cdot C$, mentre $C\cdot A^{-1} = A\cdot B\cdot A^{-1}$ che è diversa da B.

j. Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

114. a. Se A è invertibile, si possono moltiplicare entrambi i membri dell'equazione a sinistra per A^{-1} e si ottiene:
$A^{-1}AX = A^{-1}B$, da cui $X = A^{-1}\cdot B$
Se A non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A e B.

b. Raccogliamo X a destra del primo membro: $(A+I)\cdot X = B$. Se $A+I$ è invertibile, si può moltiplicare l'equazione a sinistra per $(A+I)^{-1}$ e si ottiene: $X = (A+I)^{-1}B$
Se $A+I$ non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A e B.

c. Raccogliamo X a destra del primo membro: $(A+B)\cdot X = C$. Se $A+B$ è invertibile, si può moltiplicare l'equazione a sinistra per $(A+B)^{-1}$ e si ottiene: $X = (A+B)^{-1}C$
Se $A+B$ non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A, B e C.

d. Portiamo B a secondo membro e raccogliamo A a sinistra del primo membro:
$$A\cdot(XA+XB) = I-B.$$
Possiamo ancora raccogliere X a sinistra dell'espressione in parentesi e ottenere
$$A\cdot X\cdot(A+B) = I-B.$$
Se A e $A+B$ sono invertibili, si può moltiplicare l'equazione a sinistra per A^{-1} e a destra per $(A+B)^{-1}$ e ottenere $X = A^{-1}(I-B)(A+B)^{-1}$.
Se A non è invertibile o $A+B$ non è invertibile non si può dire niente sulla risolubilità o meno dell'equazione, senza conoscere A e B.

e. Sapendo che $A \cdot X + X \cdot B = C$, qualunque tentativo di moltiplicare a destra o a sinistra per A^{-1} o B^{-1} o $(A+B)^{-1}$ non riesce a isolare la matrice X a primo membro, per cui non è possibile dare matricialmente una espressione elementare per X senza conoscere A e B, né dare condizioni affinché l'equazione abbia soluzioni.

f. Anche qui qualunque tentativo di isolare la matrice X a primo membro, fallisce, per cui non è possibile dare matricialmente un'espressione elementare per X senza conoscere A e B.

115. Se $A = \begin{pmatrix} a\, b \\ c\, d \end{pmatrix}$, allora $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$ La matrice è nulla se, simultaneamente $\{a^2+bc=0\ ;\ ab+bd=0\ ;\ ac+dc=0\ ;\ bc+d^2=0\}$.
Conviene, innanzitutto esaminare la seconda equazione: $(a+d)b = 0$ dalla quale si deducono due possibilità:

- $b = 0$, nel qual caso dalle altre si trova subito $a = 0$ e $d = 0$ (nessuna condizione su c). Quindi le matrici del tipo $A = \begin{pmatrix} 0\, 0 \\ c\, 0 \end{pmatrix}$ sono tra quelle cercate.
- $a + d = 0$, nel qual caso dalle altre si trova solo $a^2 + bc = 0$. Quindi anche le matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ con $a^2+bc=0$ sono tra quelle cercate.

In definitiva, tenendo presente che tra le matrici del secondo tipo rientrano anche quelle del primo tipo, si conclude sinteticamente che:
Le matrici cercate sono tutte e sole quelle del tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ con $a^2+bc=0$.

116. Per esempio $\begin{pmatrix} 1\, 0 \\ 0\, 0 \end{pmatrix}$.

117. a. Se esistesse A^{-1} si avrebbe $A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot 0$ da cui $B = 0$.

b. Il sistema omogeneo $A \cdot x = 0$ ha almeno una soluzione non nulla b, dato che $\varrho(A) < n$. Poniamo quindi $B = (b \mid b \mid \cdots \mid b)$. Allora $B \neq 0$ e $A \cdot B = 0$.

118. A Calcoliamo A^{-1} riducendo A e contemporaneamente I mediante l'algoritmo di Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \\ \updownarrow \\ R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \to R_2 - 2R_3 \\ R_1 \to R_1 - 3R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1 \to R_1 - 2R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

B La matrice B è a blocchi: basta invertire i singoli blocchi con l'algoritmo standard.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & -5/12 & 1/2 & 5/12 \\ 0 & 0 & 5/24 & -1/4 & 7/24 \end{pmatrix}$$

C La matrice C è quasi diagonale. La si riduce a I dividendo ogni riga per l'elemento della diagonale. Per completare la riduzione occorre $R_1 \to R_1 - 5R_5$ Le stesse operazioni su I forniscono subito l'inversa.

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

D La matrice è antidiagonale. Per ridurla occorre scambiare l'ordine delle righe e dividere ogni riga per il pivot. L'inversa è una matrice antdiagonale però con gli elementi scambiati e invertiti.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E Matrice anti-a blocchi. Generalizzazione del caso precedente: si invertono e si scambiano i singoli blocchi

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -4/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

119. a. Vera. È semplicemente il teorema di Binet.

b. Falsa. Controesempio: $A = I$ e $B = I$. Allora $\det(A + B) = \det(2I) = 2^n$, mentre $\det(A) + \det(B) = \det(I) + \det(I) = 2$. Se $n \neq 1$ sono diversi.

c. Vera. Infatti $1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$ e quindi $1 = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$.

d. Vera. Infatti $\det(A^{-1}{\cdot}B{\cdot}A) = \det(A^{-1}){\cdot}\det(B){\cdot}\det(A) = \det(A^{-1}){\cdot}\det(A){\cdot}\det(B)$ (è possibile lo scambio perché ora si tratta di numeri e non di matrici). Dato che $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ (vedi problema precedente), si ottiene $\det(B)$.

e. Vera. Infatti $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det(A))^2$.

f. Falsa. Infatti $-A$ si ottiene moltiplicando ciascuna delle n righe di A per -1, quindi il suo determinante è il determinante di A moltiplicato per $(-1)^n$. Quindi, se n è pari e $\det(A) \neq 0$, allora $\det(A) = \det(-A)$ e quindi sono differenti. Se però n è dispari l'affermazione è vera.

120. A Si può osservare che $C_1 + C_3 = 2C_2$; questo implica che $\det(A) = 0$

B Sviluppiamo successivamente lungo R_3, R_2, R_3, C_1:

$$\det\begin{pmatrix} 0&1&1&2&1&0\\ 0&0&2&0&5&0\\ 0&0&7&0&0&0\\ 4&1&3&2&2&5\\ 0&1&4&0&1&0\\ 0&1&1&4&3&1 \end{pmatrix} = 7\cdot\det\begin{pmatrix} 0&1&2&1&0\\ 0&0&0&5&0\\ 4&1&2&2&5\\ 0&1&0&1&0\\ 0&1&4&3&1 \end{pmatrix} = 7\cdot 5\cdot\det\begin{pmatrix} 0&1&2&0\\ 4&1&2&5\\ 0&1&0&0\\ 0&1&4&1 \end{pmatrix} =$$

$$= 7\cdot 5\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 0&2&0\\ 4&2&5\\ 0&4&1 \end{pmatrix} = 7\cdot 5\cdot(-1)\cdot(-4)\cdot 2 = 280$$

C La matrice è a blocchi: il determinante è il prodotto dei determinanti dei singoli blocchi. Dato che il secondo blocco ha determinante nullo, allora $\det(C) = 0$.

D La matrice è triangolare superiore a blocchi: gli elementi sopra i tre blocchi non intervengono nel calcolo del determinante, quindi :

$$\det(D) = \det\begin{pmatrix} 1&2\\ 1&0 \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} 1&2\\ 1&3 \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} 1&0\\ 1&1 \end{pmatrix} = (-2)\cdot 1\cdot 1 = -2$$

E Basta sottrarre R_2 da R_1 e proseguire:

$$\det(E) = \det\begin{pmatrix} 0&0&0&0&9\\ 1&12&12&13&87\\ 3&-3&9&0&81\\ 7&8&-2&9&65\\ 1&-1&3&1&9 \end{pmatrix} = 9{\cdot}\det\begin{pmatrix} 1&12&12&13\\ 3&-3&9&0\\ 7&8&-2&9\\ 1&-1&3&1 \end{pmatrix} =$$

Cerchiamo di azzerare l'ultima riga: $C_1 \to C_1 - C_4$, $C_2 \to C_2 + C_4$, $C_3 \to C_3 - 3C_4$

$$= 9\cdot\det\begin{pmatrix} -12&25&-27&13\\ 3&-3&9&0\\ -2&17&-29&9\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = 9\cdot\det\begin{pmatrix} -12&25&-27\\ 3&-3&9\\ -2&17&-29 \end{pmatrix} =$$

Cerchiamo di azzerare la seconda riga: $C_3 \to C_3 - 3C_1$, $C_2 \to C_2 + C_1$

$$= 9\cdot\det\begin{pmatrix} -12&13&9\\ 3&0&0\\ -2&15&-23 \end{pmatrix} = 9\cdot(-3)\cdot\Big((-12)\cdot(-23) - 9\cdot(-2)\Big) = 11718$$

131. a. Dato che la matrice completa è quadrata, conviene innanzitutto calcolarne il determinante, facilitandoci il compito tramite qualche operazione elementare sulle righe e sulle colonne.

$$\det\begin{pmatrix} k&1&-1\\ 2&1+k&2\\ 2-k^2&1&k+2 \end{pmatrix} \underset{C_3 \to C_3 + C_2}{=} \det\begin{pmatrix} k&1&0\\ 2&1+k&3+k\\ 2-k^2&1&3+k \end{pmatrix} \underset{R_2 \to R_2 - R_3}{=} \det\begin{pmatrix} k&1&0\\ k^2&k&0\\ 2-k^2&1&3+k \end{pmatrix} =$$

$= (3+k)\det\begin{pmatrix} k&1\\ k^2&k \end{pmatrix} = 0$. Quindi il determinante è nullo qualunque sia $k \in \mathbb{R}$.

In conclusione la matrice completa ha sempre caratteristica minore di 3; occorre quindi esaminare la caratteristica della matrice dei coefficienti:

La sottomatrice formata da R_1, R_2, C_1, C_2 ha determinante $\det\begin{pmatrix} k&1\\ 2&1+k \end{pmatrix} = k^2 + k - 2$ che si annulla per $k = 1, -2$. Quindi

Se $k \neq 1, -2$, allora $\varrho(A) = 2$ e di conseguenza anche $\varrho(A\,|\,b) = 2$ e quindi il sistema ha una soluzione.

Se $k = 1$ o $k = -2$, le ultime due righe sono rispettivamente $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ e $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$
Quindi in entrambi i casi il sistema non ha soluzioni.

131. b. Calcoliamo la caratteristica della matrice dei coefficienti iniziando col calcolo del suo determinante.

$$\det\begin{pmatrix} k+1 & 4 & -(1+k) \\ k^2 & k+1 & -k \\ -k & 1-3k & k^2 \end{pmatrix} \underset{C_3 \to C_3 + C_1}{=} \det\begin{pmatrix} k+1 & 4 & 0 \\ k^2 & k+1 & k^2-k \\ -k & 1-3k & k^2-k \end{pmatrix} \underset{R_2 \to R_2 - R_3}{=} \det\begin{pmatrix} k+1 & 4 & 0 \\ k^2+k & 4k & 0 \\ -k & 1-3k & k^2-k \end{pmatrix}$$

Il determinante è 0 per ogni k. Quindi $\varrho(A) \leq 2$ per ogni k.
Può convenire ora calcolare il determinante di una sottomatrice 3×3 della matrice completa per esempio di quello costituito con C_1, C_2, C_4

$$\det\begin{pmatrix} k+1 & 4 & 1 \\ k^2 & k+1 & 1 \\ -k & 1-3k & 1 \end{pmatrix} = k + 2k^2 - 3k^3 \text{ ed è nullo per } k = 0, 1, -1/3.$$

Se $k \neq 0, 1, -1/3$, la matrice completa ha quindi caratteristica 3, mentre quella dei coefficienti ha caratteristica ≤ 2, per cui il sistema non ha soluzioni.

Se $k = 0$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^1 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se $k = 1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema non ha evidentemente soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Se $k = -1/3$ occorre ridurre la matrice dei coefficienti:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2/3 & 4 & -2/3 & 1 \\ 1/9 & 2/3 & 1/3 & 1 \\ 1/3 & 2 & 1/9 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - (1/6)R_1 \\ R_3 \to R_3 - (1/2)R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2/3 & 4 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 4/9 & 5/6 \\ 0 & 0 & 4/9 & 1/2 \end{array}\right)$$

Quindi anche per $k = -1/3$, il sistema non ha soluzioni.

Conclusione: Se $k = 0$, il sistema ha ∞^1 soluzioni, se $k \neq 0$, non ne ha.

131. c. Conviene innanzitutto calcolare il determinante della matrice completa, sviluppandolo lungo l'ultima colonna (quella dei termini noti):

$$\det\begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ k-1 & k & 2 & 2k \\ 4 & 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix} = 2k \cdot \det\begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & k-2 \end{pmatrix} = 2k(2k^2 - 6k)$$

Il determinante si annulla quindi per $k = 0, 3$. Per valori diversi da $k = 0$ e $k = 3$, quindi $\varrho(A\,|\,b) = 4$, mentre $\varrho(A) \leq 3$ e il sistema non ha soluzioni.
Se $k = 0$, il sistema è omogeneo e, mediante semplici operazioni elementari, si vede che ha tre pivot, quindi l'unica soluzione banale.
Se $k = 3$, sempre mediante semplici operazioni elementari, si vede che compare un'equazione incompatibile, per cui il sistema non ha soluzioni.
Conclusione: Se $k = 0$, il sistema ha una soluzione, se $k \neq 0$, non ne ha.

132. Come pivot per la prima colonna va bene 3, quindi iniziamo la riduzione eseguendo le operazioni elementari $R_3 \to R_3 - (1/3)R_1$ e $R_4 \to R_4 - (2/3)R_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k-1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & k-2/3 & k \end{array}\right)$$

4 va bene come pivot per la seconda colonna quindi: $R_3 \to R_3 - (1/4)R_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k-7/12 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & k-2/3 & k \end{array}\right)$$

A questo punto la riduzione mediante massimo pivot non è più possibile (dipende da a) né conveniente, per cui calcoliamo $\det(A)$ (A matrice dei coefficienti):
$\det(A) = 3 \cdot 4 \cdot ((k - 7/12)(k - 2/3) - 5/36) = 12k^2 - 15k + 3$. Pertanto se $k \neq 1$ e $k \neq 1/4$, allora $\det(A) \neq 0$, il sistema è di Cramer e ammette una e una sola soluzione.

Se $k = 1$: $$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5/12 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right) R_4 \to R_4 - (5/4)R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5/12 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Il sistema è ridotto, ha tre incognite pivotali e quindi ∞^1 soluzioni.

Se $k = 1/4$: $$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/3 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & -5/12 & 1/4 \end{array}\right) R_4 \to R_4 + R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/3 & 5/12 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{array}\right).$$

Il sistema è ridotto e evidentemente non ha soluzioni.

Conclusione: Se $k = 1$: ∞^1 soluzioni.
Se $k = 1/4$: nessuna soluzione.
In tutti gli altri casi una e una sola soluzione.

133. a. Riduciamo la matrice completa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2k-1 \\ 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1+k-2k^2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 1-k \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 2-2k^2 \end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2 - R_1$
$R_3 \to R_3 - kR_1$
$R_3 \to R_3 + R_2$

Gli elementi della diagonale si annullano per $k = 1$ e per $k = -2$. Quindi:

Se $k \neq 1, -2$, la matrice è ridotta con tre pivot e il sistema ha una soluzione.

Se $k = 1$, le ultime due righe sono nulle e quindi il sistema ha un pivot e ∞^2 soluzioni.

Se $k = -2$, l'ultima riga è $(0 \quad 0 \quad 0 \mid -6)$, quindi il sistema non ha soluzioni.

133. b. Il minore incorniciato della matrice dei coefficienti è nullo per $k = 0, 1$. Quindi:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \begin{matrix} k^2-k+1 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -2 & 0 \\ -2 & k^2-k \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ k \end{matrix} \end{array}\right)$$

Se $k \neq 0, 1$, allora $\varrho(A) = 2$ e di conseguenza anche $\varrho(A \mid b) = 2$ e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Se $k = 0$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema non ha evidentemente soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se $k = 1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^2 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

133. c. Scriviamo la matrice e iniziamo l'algoritmo gaussiano:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & k-1 & -1 \\ k & 3 & k+1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - (k/2)R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & -1 & -2 \\ k & 3 - k^2/2 & k+1-k/2 \end{array}\right)$$

La seconda e la terza equazione si possono scrivere come $\{y = k \; ; \; y = 2\}$, quindi:

Se $k \neq 2$ il sistema non ha soluzioni.

Se $k = 2$, le tre ultime equazioni sono proporzionali e quindi il sistema ha una soluzione.

133. d. Guardando la matrice completa del sistema, si vede che è più semplice, creare degli zeri nella terza colonna invece che nella prima, mediante operazioni elementari. Per questo non è neanche necessario scambiare le colonne:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & -k \\ -1 & k & -1 & 1 \\ k-2 & 2k-1 & -1 & k^2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & -k \\ k-1 & k-1 & 0 & 1-k \\ 2k-2 & 2k-2 & 0 & k^2-k \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & -k \\ k-1 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & k^2+k-2 \end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2 + R_1$
$R_3 \to R_3 + R_1$
$R_3 \to R_3 - 2R_2$

Se $k \neq -2, 1$, il sistema non ha soluzioni, perché il termine noto $k^2 + k - 2$ è $\neq 0$.

Se $k=-2$, le matrici completa e incompleta hanno caratteristica 2 perché è non nullo il minore inquadrato, quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \begin{matrix}-2\\-3\\0\end{matrix} & \begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}-1 & 1\\ -3 & 0\end{matrix}}\\ \begin{matrix}0 & \;\;0\end{matrix}\end{matrix} & \begin{matrix}2\\3\\0\end{matrix} \end{array}\right)$$

Se $k=1$, la matrice è quella sotto e quindi il sistema ha evidentemente ∞^2 soluzioni.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

133. e. Usiamo come primo pivot quello incorniciato di R_3 che non dipende da k:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 & k & 2 \\ \boxed{1} & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 \\ \updownarrow \\ R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - kR_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & k & 1-2k^2 & k & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-2k & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Scambiamo ora due righe per usare il pivot inquadrato che non dipende da k.

$$\begin{array}{c} R_2 \\ \updownarrow \\ R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1-2k^2 & k & 2 \\ 0 & 1 & 2-2k & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - kR_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-2k^2-k & 0 & 2-k \\ 0 & 0 & 1-2k & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le due ultime equazioni sono $\begin{cases} (1-2k^2-k)\,z = 2-k \\ \quad\;\;(1-2k)\,z = \;\;0 \end{cases}$

Il coefficiente $1-2k^2-k$ si annulla per $k=-1, 1/2$ e il coefficiente $1-2k$ per $k=1/2$.

Se $k \neq -1, 1/2$, allora le due ultime equazioni sono $\left\{ z = \dfrac{2-k}{1-2k^2-k} \;;\; z=0 \right\}$, quindi occorre che sia $k=2$, altrimenti non ci sono soluzioni.

Se $k=2$, le ultime due righe sono $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$, la matrice è ridotta e il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Se $k=-1$, la terza riga è $(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \mid 1)$, quindi il sistema non ha soluzioni.

Se $k=1/2$, la terza riga è $(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \mid 3/2)$, quindi il sistema non ha soluzioni.

Conclusione: Se $k=2$, il sistema ha ∞^1 soluzioni, se $k \neq 2$, non ne ha.

133. f. Effettuiamo qualche operazione elementare sulle righe della matrice completa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 2k+1 & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+1 & 2k & k \\ k & k & -k & k \end{array}\right) R_4 \to R_4 - R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} k & 2k+1 & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+1 & 2k & k \\ 0 & -k-1 & -2k & k-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 \\ \updownarrow \\ R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ k & 2k+1 & k & 1 \\ 0 & k+1 & 2k & k \\ 0 & -k-1 & -2k & k-1 \end{array}\right)$$

$$R_2 \to R_2 - kR_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+1 & 2k & 1 \\ 0 & k+1 & 2k & k \\ 0 & -k-1 & -2k & k-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 + R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k+1 & 2k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right)$$

Quindi perché il sistema abbia soluzioni occorre che $k=0$ e contemporaneamente $k-1=0$.

Questo non è possibile, quindi:

Il sistema non ha soluzioni per alcun $k \in \mathbb{R}$

134. a. Si può iniziare con l'algoritmo gaussiano:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & b \\ -4 & a & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 + 4R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & b-1 \\ 0 & a+8 & -4 & 6 \end{array}\right)$$

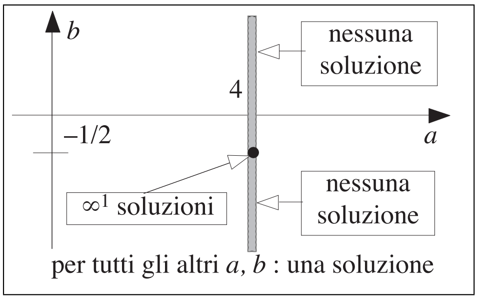
A questo punto è possibile calcolare il determinante della matrice dei coefficienti che è $4-a$.

Di conseguenza, se $a \neq 4$, il sistema è di Cramer e ha un'unica soluzione, qualunque sia b.

Se $a=4$, riduciamo ulteriormente la matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & b-1 \\ 0 & 12 & -4 & 6 \end{array}\right) R_3 \to R_3 + 4R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 4b+2 \end{array}\right)$$

Quindi il sistema ha soluzioni e ne ha ∞^1, solo se $b = -1/2$.
In conclusione:
$\underline{\text{Se } a \neq 4}$: una soluzione.
$\underline{\text{Se } a = 4 \text{ e } b \neq -1/2}$: nessuna soluzione.
$\underline{\text{Se } a = 4 \text{ e } b = -1/2}$: ∞^1 soluzioni.
La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



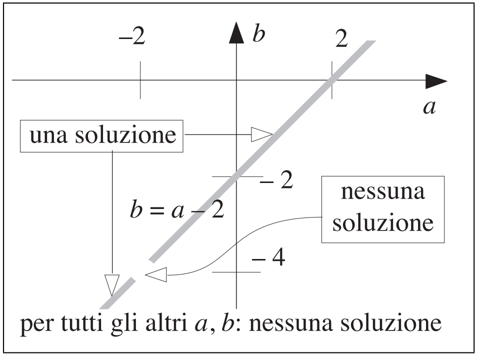
134. b. Iniziamo l'algoritmo gaussiano:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & b & 1\end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 + R_1\\ R_3 \to R_3 - 2R_1\end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1\\ 0 & a+2 & 1\\ 0 & b-2a & -1\end{array}\right)$$

A questo punto conviene calcolare il determinante della matrice completa.

Si ha: $\det(A\,|\,b) = a - b - 2$.
Se questo determinante è diverso da 0, cosa che accade se $b \neq a - 2$, allora il sistema non ha soluzioni, perché $\varrho(A\,|\,b) = 3$, mentre $\varrho(A) \leq 2$.
Vediamo ora cosa succede se $b = a - 2$. Sostituendo b, la terza equazione è proporzionale alla seconda e può essere trascurata, quindi la matrice del sistema è $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1\\ 0 & a+2 & 1\end{array}\right)$.

È quindi chiaro che se $a \neq -2$, la matrice è ridotta e il sistema ha una soluzione, mentre, se $a = -2$ (e quindi $b = -4$), l'ultima equazione è incompatibile.
In conclusione:
$\underline{\text{Se } b \neq a - 2}$: nessuna soluzione.
$\underline{\text{Se } b = a - 2 \text{ e } a \neq -2}$: una soluzione.
$\underline{\text{Se } a = -2 \text{ e } b = -4}$: nessuna soluzione.
La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



134. c. Conviene creare degli zeri nella seconda colonna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & -1 & 1\\ -1 & b & 0 & 1\\ 2 & b & -2 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1\\ R_3 \to R_3 - R_1\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & -1 & 1\\ -1-a & 0 & 1 & 0\\ 2-a & 0 & -1 & 0\end{array}\right)$$

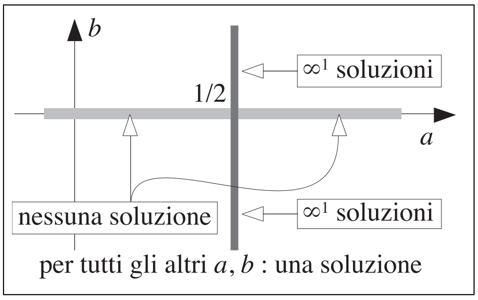
A questo punto conviene calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

Si ha: $\det(A) = b \cdot (2a - 1)$.
Se questo determinante è diverso da 0, cosa che accade se $a \neq 1/2$ e $b \neq 0$, allora il sistema ha una soluzione, perché è un sistema di Cramer.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix}1/2\\-3/2\end{matrix}} & \begin{matrix}b\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\0\end{matrix}\\ 3/2 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix}a\\-1-a\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\0\end{matrix}\\ 2-a & 0 & -1 & 0\end{array}\right)$$

Se $a = 1/2$, l' ultima riga può essere trascurata e la matrice ha caratteristica 2 per ogni b, perché è non nullo il minore inquadrato, quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni.
Se $b = 0$, la matrice dei coefficienti ha caratteristica sempre 2 perché è non nullo il minore inquadrato.
L'unico minore significativo di ordine 3 della matrice completa (quello formato da C_1, C_3, C_4) ha determinante $2a - 1$.
Pertanto, se $a \neq 1/2$ (e sempre $b = 0$), allora $\varrho A\,|\,b) = 3$ e il sistema non ha soluzioni, mentre se $a = 1/2$ ne ha ∞^1, come già visto sopra.
In conclusione:
$\underline{\text{Se } a \neq 1/2 \text{ e } b \neq 0}$: una soluzione.
$\underline{\text{Se } a = 1/2}$: ∞^1 soluzioni per ogni b.
$\underline{\text{Se } a \neq 1/2 \text{ e } b = 0}$: nessuna soluzione.
La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



134. d. Conviene creare degli zeri nella colonna C_2 che non dipende da parametri:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ b & 0 & a & a\\ a-1 & -1 & 0 & a \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1\\ R_4 \to R_4 + R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a\\ 1-2a & 0 & -1 & -2a\\ b & 0 & a & a\\ \hline 2a-1 & 0 & 1 & 2a \end{array}\right)$$

L'ultima riga può essere trascurata in quanto proporzionale alla seconda. Il determinante della matrice dei coefficienti è $a - 2a^2 + b$, quindi:

Se $b \neq 2a^2 - a$ il sistema ha una soluzione, perché è un sistema di Cramer.

Se $b = 2a^2 - a$ sostituiamo b (dato che è difficile esplicitare a dall'equazione $b = 2a^2 - a$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & \cline{1-2} & & \\ a & \multicolumn{1}{|c}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} & a\\ 1-2a & \multicolumn{1}{|c}{0} & \multicolumn{1}{c|}{-1} & -2a\\ \cline{2-3} 2a^2-a & 0 & a & a \end{array}\right)$$ Il minore inquadrato è diverso da 0, quindi $\varrho(A) = 2$.

Per calcolare $\varrho(A\,|\,b)$ si può considerare l'unica sottomatrice di $(A\,|\,b)$ (oltre A) che lo contiene, quella formata da C_2, C_3, C_4. Il suo determinante è $-a + 2a^2$ ed è nullo per $a = 0, 1/2$. In questi due casi, per il teorema di Kronecker, $\varrho(A\,|\,b) = 2$, altrimenti è 3.

In conclusione:

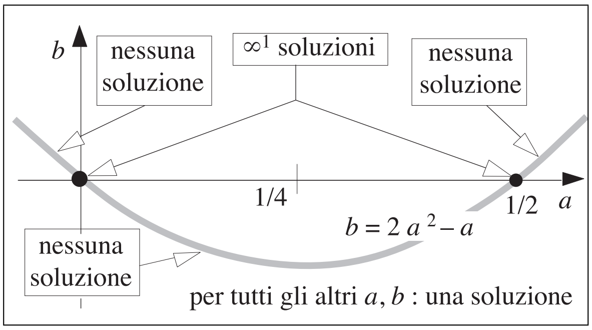
Se $b \neq 2a^2 - a$: una soluzione.

Se $b = 2a^2 - a$ e $a \neq 0, 1/2$: nessuna soluzione.

Se $a = 0$ e $b = 0$: ∞^1 soluzioni.

Se $a = 1/2$ e $b = 0$: ∞^1 soluzioni.

Notiamo che $b = 2a^2 - a$ è la parabola di vertice $(1/4\,, -1/8)$ passante per $(0, 0)$ e $(1/2, 0)$. La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



134. e. Eseguiamo un'operazione elementare:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & b & b\\ a & 1 & 1 & 2\\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & b & b\\ 0 & 0 & 1-b & 2-b\\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è $a \cdot b \cdot (b-1)$, quindi se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $b \neq 1$, allora il sistema ha una soluzione, perché è un sistema di Cramer.

Esaminiamo quindi i tre casi particolari:

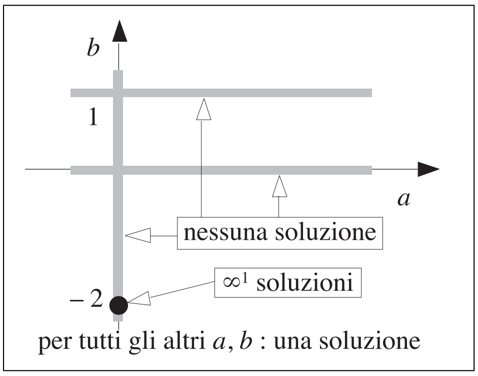
Se $a = 0$, calcoliamo il determinante dell'unica sottomatrice 3×3 significativa della matrice completa: Quindi, se $b \neq -2, 1$, $\varrho(A\,|\,b) = 3$, mentre $\varrho(A) = 2$, quindi il sistema non ha soluzioni.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & b & b\\ 0 & 1-b & 2-b\\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} = b^2 + b - 2$$

Se $b = -2$ (sempre $a = 0$): $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) R_3 \to R_3 + 2R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right)$$ e il sistema ha ∞^1 soluzioni. Il caso $b = 1$ (e $a = 0$) può venire esaminato nel sottocaso $b = 1$.

Se $b = 0$ la matrice è quella a lato ed il sistema non ha soluzioni, qualunque sia a.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Se $b = 1$ la matrice è quella a lato ed il sistema non ha soluzioni, qualunque sia a.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$



In conclusione:

Se $a \neq 0,\ b \neq 0,\ b \neq 1$: una soluzione.

Se $a = 0$ e $b = -2$: ∞^1 soluzioni.

Se $a = 0$ e $b \neq -2$: nessuna soluzione.

Se $b = 0$ o $b = 1$: nessuna soluzione.

La situazione può essere schematizzata nel disegno sopra.

141. A. Riduciamo finché è possibile la matrice:

$$\begin{pmatrix} k & 2 & 3 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ k & 0 & k & -k \\ -k & 2 & 1 & 3k \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1 \end{array} \begin{pmatrix} k & 2 & 3 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & -2 & k-3 & -k-1 \\ 0 & 4 & 4 & 3k+1 \end{pmatrix}$$

A questo punto conviene calcolare il determinante di A:
$\det(A) = k(3k^3 - 4k^2 - k + 2)$. Il determinante si annulla per $k = 0$ e per k soddisfacente l'equazione di terzo grado $3k^3 - 4k^2 - k + 2 = 0$.
Per tentativi, si scopre che $k = 1$ è una radice del polinomio $3k^3 - 4k^2 - k + 2 = 0$.
Dividendo $3k^3 - 4k^2 - k + 2 = 0$ per $k - 1$, si trova il quoziente $3k^2 - k - 2$ che si annulla per $k = 1\ ,\ -2/3$. Quindi il determinante di A è nullo per $k = 0, 1, -2/3$. Di conseguenza:
<u>Se $k \neq 0\ ,\ 1\ ,\ -2/3$</u>, $\varrho(A) = 4$, perché l'unico minore di ordine 4 è non nullo.

Esaminiamo $k = 1$:
$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} & 3 & 1 \\ 0 & \multicolumn{1}{c|}{1} & 1 & 1 \\ \cline{1-2} 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right)$$
La matrice ha tre righe proporzionali. Eliminando le ultime due si ottiene una matrice ridotta con due righe significative, quindi:

<u>Se $k = 1$</u>, $\varrho(A) = 2$.

Esaminiamo $k = -2/3$:
$$\left(\begin{array}{cccc} \cline{1-3} \multicolumn{1}{|c}{-2/3} & 2 & \multicolumn{1}{c|}{3} & 1 \\ \multicolumn{1}{|c}{0} & -2/3 & \multicolumn{1}{c|}{1} & 1 \\ \multicolumn{1}{|c}{0} & -2 & \multicolumn{1}{c|}{-11/3} & -1/3 \\ \cline{1-3} 0 & 4 & 4 & -1 \end{array}\right)$$
La matrice ha almeno un minore di ordine 3 non nullo, per esempio il determinante della matrice incorniciata, quindi:

<u>Se $k = -2/3$</u>, $\varrho(A) = 3$.

Per quanto riguarda la quarta colonna:
Se $k \neq 0\,,\,1\,,\,-2/3$ la matrice non ha alcuna colonna che sia combinazione lineare delle altre.
Per $k = 1$, c'è almeno un minore non nullo di ordine 2, per esempio quello incorniciato sopra, costituito da colonne che non comprendono la quarta.
Anche per $k = -2/3$, c'è un minore non nullo di ordine 3, costituito da colonne che non comprendono la quarta, per esempio quello già considerato in precedenza. Quindi:

Se $k = 1, -2/3$ la 4^a colonna è combinazione lineare delle altre colonne, altrimenti no.

141. B. Calcoliamo il determinante di B previa qualche operazione elementare:

$$\begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 \\ k+1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & k+1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 2 & k & (k+1)^2 \\ 0 & 2 & k & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 2 & k & (k+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & -k^2-3k \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_3 \to R_3 + (k+1)R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{array} \qquad R_4 \to R_4 - R_3$$

Ora il determinante è immediato sviluppando successivamente lungo la prima colonna e l'ultima riga ed è: $(-k^2 - 3k)(k + 2)k$. Il determinante è nullo per $k = 0, -2, -3$, quindi:
<u>Se $k \neq 0, -2, -3$</u>, la caratteristica è 4, perché l'unico minore di ordine 4 è non nullo.

Esaminiamo $k = 0$:
$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & \multicolumn{1}{c|}{2} & 0 & 1 \\ -1 & \multicolumn{1}{c|}{0} & 1 & 1 \\ \cline{1-2} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Eliminando l'ultima riga che è nulla e la terza riga che è uguale alla prima si ottiene una matrice con un minore di ordine due non nullo, quindi:

<u>Se $k = 0$</u>, $\varrho(B) = 2$.

Esaminiamo $k = -2$:
$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cline{1-2} \cline{4-4} \multicolumn{1}{|c}{-1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & 1 & \multicolumn{1}{|c|}{-1} \\ \multicolumn{1}{|c}{0} & \multicolumn{1}{c|}{2} & -2 & \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \multicolumn{1}{|c}{0} & \multicolumn{1}{c|}{0} & 0 & \multicolumn{1}{|c|}{-2} \\ \cline{1-2} \cline{4-4} \end{array}\right)$$
La matrice ha almeno un minore di ordine 3 non nullo, per esempio il determinante della matrice incorniciata, quindi:

<u>Se $k = -2$</u>, $\varrho(B) = 3$.

Esaminiamo $k=-3$: $\left(\begin{array}{|ccc|c} \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ La matrice ha almeno un minore di ordine 3 non nullo, per esempio il determinante della matrice incorniciata, quindi:

Se $k=-3$, $\varrho(B)=3$.

Per quanto riguarda la quarta colonna:
Se $k \neq 0\,, -2\,, -3$ la matrice non ha alcuna colonna che sia combinazione lineare delle altre.
Per $k=0$, c'è almeno un minore non nullo di ordine 2, per esempio quello incorniciato sopra, costituito da colonne che non comprendono la quarta.
Per $k=-2$, si nota subito che $C_1+C_2+C_3=0$, quindi non c'è alcun minore non nullo di ordine 3 costituito da colonne che non comprendono la quarta, che pertanto non è combinazione lineare delle altre.
Per $k=-3$, c'è un minore non nullo di ordine 3, costituito da colonne che non comprendono la quarta, per esempio quello già considerato in precedenza.
Quindi:

Se $k=0,-3$ la 4^a colonna è combinazione lineare delle altre colonne, altrimenti no.

142. Guardiamo i minori 3×3 della matrice: Il primo (C_1,C_2,C_3) ha determinante zero, per cui una delle colonne è combinazione lineare delle altre. Basta risolvere il sistema $\begin{cases} a & = & 4 \\ a-b & = & 1 \end{cases}$ (ottenuto da $aC_1+bC_2=C_3$) per scoprire che $4C_1+3C_2=C_3$ e quindi C_1,C_2,C_3 sono ciascuna combinazione lineare delle altre due. Svolgendo un conto analogo su C_1,C_2,C_4 si scopre che $3C_1+2C_2=C_4$. Il determinante di C_1,C_2,C_5 è diverso da zero, pertanto C_5 non è combinazione lineare di C_1 e C_2 e quindi neanche di tutte le altre, perché, se lo fosse, dalle relazioni tra C_1,C_2,C_3,C_4 si dedurrebbe che C_5 è combinazione lineare di C_1 e C_2.