Classificazione degli esercizi: F : Fondamentale C : Consigliato A : Approfondimento T : Teorico

1. SISTEMI E MATRICI: Algoritmo di Gauss

F 101. Usando l'algoritmo di Gauss dire se hanno soluzioni reali e, in caso affermativo, risolvere i seguenti sistemi (il numero delle incognite è scritto a lato della graffa):
• Nei sistemi c. e f. , scrivere le soluzioni in tutti i modi possibili, cioè con tutte le possibili scelte delle incognite non pivotali.

a. $_3\begin{cases} x+y-z = 1 \\ x-y+2z = 0 \\ -3x+y-3z=-1 \end{cases}$ b. $_4\begin{cases} x+y-z+t=1 \\ x-3y+z=0 \\ -x+y+t=1 \end{cases}$ c. $_4\begin{cases} y-z+2t=1 \\ 2y-2z=0 \\ -y+z+2z=1 \end{cases}$

d. $_3\begin{cases} 5y-z=-1 \\ x-3y=1 \\ 2x-y-z=1 \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases}$ e. $_5\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-y=0 \\ z+t=6 \\ t+u=7 \end{cases}$ f. $_4\begin{cases} z+2t=1 \\ x+2y+t=2 \\ 2x+4y-z=3 \end{cases}$

F 102. Mediante l'algoritmo gaussiano, stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ hanno soluzioni i sistemi lineari seguenti e, in caso affermativo dire quante sono:

a. $_3\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-y+z=0 \\ x+2y-2z=k \end{cases}$ b. $_3\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-3y=0 \\ 2x-y+z=k^2 \end{cases}$ c. $_3\begin{cases} x+2y+z=1 \\ y-z=1 \\ x+k^2y+2z=k+k^2 \end{cases}$

F 103. Per ognuno dei tre sistemi lineari a lato nelle incognite x, y, z, t dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$, assegnati mediante la loro matrice completa:

- Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il sistema è ridotto e in caso contrario determinare un sistema ridotto equivalente al dato.
- Dire, per ogni $k \in \mathbb{R}$ se il sistema ha soluzioni e quante.
- Determinare, quando possibile, tutte le soluzioni.

a. $\left(\begin{array}{cccc|c} k^2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k+1 & k^2-1 & 0 \end{array}\right)$

b. $\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 2 & 1 & 0 \\ k & 1 & k+3 & k+3 & 1 \\ k & 1 & 2 & k^2 & 1+k \\ 0 & 0 & k+1 & k+2 & 1 \end{array}\right)$

c. $\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k-1 & k^2-4 & k & 1 \end{array}\right)$

F 104. Mediante la riduzione gaussiana, stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ hanno soluzioni i sistemi lineari seguenti e, in caso affermativo dire quante sono:

a. $_2\begin{cases} kx-y=1 \\ x-4ky=2 \end{cases}$ b. $_3\begin{cases} kx+y-z=1 \\ kx-y+kz=-1 \end{cases}$ c. $_2\begin{cases} kx+2ky=k \\ kx+y=1-k \end{cases}$

C 105. Altri sistemi da studiare mediante la riduzione gaussiana o altre serie di operazioni elementari:

a. $_2\begin{cases} kx+y=-1 \\ (1+k)x+y=k \\ (3-k)x=2k-1 \end{cases}$ b. $_3\begin{cases} kx+y=1 \\ 2x+(k+1)y+z=1 \\ kx+3y+z=4 \end{cases}$ c. $_3\begin{cases} kx-y+(k+1)z=0 \\ -x+ky=1 \\ (k-1)y+2z=1 \\ x-y+(k-1)z=-k \end{cases}$

C 106. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ hanno soluzioni diverse dalla banale e quante soluzioni hanno i sistemi omogenei seguenti:

a. $_3\begin{cases} kx+y=0 \\ x+z=0 \\ x+ky-2z=0 \end{cases}$ b. $_4\begin{cases} kx+y+z+t=0 \\ x-y+t=0 \\ 2x+z+t=0 \\ kx+3y+2z=0 \end{cases}$ c. $_7\begin{cases} x-ky+z+t-2u+v+w=0 \\ kx-y+z+t-2u+v+w=0 \end{cases}$

A 107. Per ogni coppia $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ dire quante soluzioni ha il sistema a lato, dipendente da $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} ab & 1 & 0 & 1 \\ 0 & b+1 & 0 & 1 \\ 0 & b+1 & a(b-1) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

Determinare un $a \in \mathbb{R}$ per il quale il sistema ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$ e un $a \in \mathbb{R}$ per il quale il sistema <u>non</u> ha soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$.

1. SISTEMI E MATRICI: Matrici

F 111. Completare la tabella seguente dicendo quali prodotti tra le matrici seguenti sono possibili. In caso affermativo eseguirli.

1^0 fattore \ 2^0 fattore	A	B	C	D	E	F
A	no	no				
B	sì	sì				
C						
D						
E						
F						

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$F = (0\ 1\ -1)$$

F 112. Siano A, B, C matrici quadrate dello stesso ordine. Dire quali di queste affermazioni sono vere (e perché) e quali false (mostrando un controesempio).

a. $A \cdot B = B \cdot A$
b. Se $A \cdot B = 0$, allora ($A = 0$ oppure $B = 0$)
c. Se $A \cdot B = B$, allora $A = I$
d. $A + B + C = C + B + A$
e. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
f. Se $A \cdot B = A \cdot C$, allora $B = C$
g. Se $A + B = A + C$, allora $B = C$
h. $(A + B)^T = A^T + B^T$
i. $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A$
j. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
k. $A^2 \cdot B^2 = (A \cdot B)^2$
l. Se $A = A^2$, allora $A = 0$ oppure $A = I$
m. Se $A^2 = 0$, allora $A = 0$
n. Se $A^2 = I$, allora A è invertibile
o. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
p. $A^2 - I = (A + I)(A - I)$

F 113. Come l'esercizio precedente supponendo inoltre che esistano A^{-1} e B^{-1}:

a. $A \cdot B$ è invertibile
b. $A + B$ è invertibile
c. Se $A \cdot B = A \cdot C$, allora $B = C$
d. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
e. $A^{-1} \cdot B \cdot A = B$
f. $(A^{-1}BA)^5 = A^{-5}B^5A^5$
g. $(A^{-1}BA)^5 = A^{-1}B^5A$
h. $A \cdot B^{-1} \neq 0$
i. Se $AB = C$, allora $B = CA^{-1}$
j. Se $A^2 = I$, allora $A = \pm I$

F 114. Siano A, B matrici reali 4×4. Dire in quali casi è possibile dare condizioni su A e B affinché le equazioni matriciali seguenti abbiano sicuramente soluzione X e, in questo caso scrivere esplicitamente la soluzione.

a. $AX = B$
b. $AX + X = B$
c. $AX + BX = C$
d. $AXA + AXB + B = I$
e. $AX + XB = I$
f. $AXB + X = B$

A 115. In $M_{22}(\mathbb{R})$: determinare tutte le matrici A tali che $A^2 = 0$.

A 116. In $M_{22}(\mathbb{R})$: trovare una matrice $A \neq I, 0$ tale che $A^2 = A$ (Suggerimento: cercare A diagonale).

T 117. Siano $A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$. Dimostrare che:

a. Se $A \cdot B = 0$ e $B \neq 0$ allora A non è invertibile.
b. Se A non è invertibile, esiste una matrice B non nulla tale che $A \cdot B = 0$.

F 118. Calcolare l'inversa di ciascuna delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F 119. Siano A, B matrici reali $n \times n$, A invertibile. Dire quali di queste affermazioni sono vere (e perché) e quali false (mostrando un controesempio).

a. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
b. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
c. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
d. $\det(A^{-1} \cdot B \cdot A) = \det(B)$
e. $\det(A^2) = (\det(A))^2$
f. $\det(-A) = -\det(A)$

F 120. Calcolare il determinante di ciascuna delle seguenti matrici:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&1&1&2&1&0\\0&0&2&0&5&0\\0&0&7&0&0&0\\4&1&3&2&2&5\\0&1&4&0&1&0\\0&1&1&4&3&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&2&3&0&0&0\\3&4&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&2&3\\0&0&0&4&5&6\\0&0&0&3&2&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&2&3&7&8&9\\1&0&9&9&9&5\\0&0&1&2&9&8\\0&0&1&3&9&7\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&12&12&13&96\\1&12&12&13&87\\3&-3&9&0&81\\7&8&-2&9&65\\1&-1&3&1&9\end{pmatrix}$$

1. SISTEMI E MATRICI: Sistemi lineari e caratteristica

F 131. Discutere il numero di soluzioni dei sistemi lineari seguenti, assegnati mediante la loro matrice completa, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. Si consiglia di usare, quando è conveniente, anche metodi diversi dall'algoritmo di Gauss.

a. $\left(\begin{array}{cc|c} k & 1 & -1\\ 2 & 1+k & 2\\ 2-k^2 & 1 & k+2\end{array}\right)$ b. $\left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 4 & -(1+k) & 1\\ k^2 & k+1 & -k & 1\\ -k & 1-3k & k^2 & 1\end{array}\right)$ c. $\left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ k-1 & k & 2 & 2k\\ 4 & 0 & k-2 & 0\end{array}\right)$

C 132. Determinare, usando fin quando possibile la strategia della pivotizzazione parziale, per quali $k \in \mathbb{R}$ ha soluzioni e quante il sistema lineare 4×4 nelle incognite x, y, z, t.

$$\begin{pmatrix}3&0&1&1\\0&4&1&1\\1&1&k&1\\2&0&1&k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\k\end{pmatrix}$$

C 133. Discutere, usando ogni volta il metodo che si ritiene più opportuno, il numero di soluzioni dei sistemi lineari seguenti al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

a. $\begin{cases} x+y+kz=2k-1\\ x+ky+z=k\\ kx+y+z=1\end{cases}$ 3 b. $\begin{cases}(k^2-k+1)x-2y=1\\ x-2y+(k^2-k)z=k\end{cases}$ 3 c. $\begin{cases}2x+ky=1\\ y=k\\ 2x+(k-1)y=-1\\ kx+3y=k+1\end{cases}$ 2

d. $\begin{cases}kx-y+z=-k\\ -x+ky-z=1\\ (k-2)x+(2k-1)y-z=k^2\end{cases}$ 3 e. $\begin{cases}y+z+t=1\\ kx+z+kt=2\\ x-y+2kz=0\\ x+2z+t=1\end{cases}$ 4 f. $\begin{cases}kx+(2k+1)y+kz=1\\ x+y-z=0\\ (k+1)y+2kz=k\\ kx+ky-kz=k\end{cases}$ 3

A 134. Discutere, usando opportunamente i metodi noti, il numero di soluzioni dei sistemi lineari seguenti al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ e schematizzare la situazione in un piano cartesiano di coordinate a, b.

a. $\begin{cases}x+2y-2z=1\\ x-y-z=b\\ -4x+ay+4z=2\end{cases}$ 3 b. $\begin{cases}x+ay=1\\ -x+2y=0\\ 2x+by=1\end{cases}$ 2 c. $\begin{cases}ax+by-z=1\\ -x+by=1\\ 2x+by-2z=1\end{cases}$ 3

d. $\begin{cases}ax+y+z=a\\ x+2y+z=0\\ bx+az=a\\ (a-1)x-y=a\end{cases}$ 3 e. $\begin{cases}ax+y+bz=b\\ ax+y+z=2\\ by+z=0\end{cases}$ 3

F 141. Discutere la caratteristica delle due matrici al variare di $k \in \mathbb{R}$ e dire per quali k la 4^a colonna è combinazione lineare delle altre tre e per quali k la combinazione è unica.

$$A=\begin{pmatrix}k&2&3&1\\0&k&1&1\\k&0&k&-k\\-k&2&1&3k\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&k+2&0&1\\-1&0&1&k+1\\k+1&2&-1&0\\-1&2&k+1&2\end{pmatrix}$$

F 142. Per ciascuna delle 5 colonne C_i della matrice A dire se C_i è combinazione lineare delle rimenenti (se sì dire qual è, se no dire perché no).

$$A=\begin{pmatrix}1&0&4&3&0\\1&-1&1&1&1\\1&-2&-2&-1&1\end{pmatrix}$$