Applicazioni lineari

01. a. Sì:

1: $\lambda_1\varphi(x_1,y_1)+\lambda_2\varphi(x_2,y_2)=\underline{(\lambda_1(x_1,y_1,\pi y_1)+\lambda_2(x_2,y_2,\pi y_2)}$

2: $\varphi\left(\lambda_1(x_1,y_1)+\lambda_2(x_2,y_2)\right)=\varphi\left(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\ ,\ \lambda_1y_1+\lambda_2y_2\right)=$

$=\underline{\left(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\ ,\ \lambda_1y_1+\lambda_2y_2\ ,\ \pi(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)\right)}$

e i due vettori sottolineati coincidono.

b. No: $\varphi(0,0,0)\neq(0,0,0)$.

c. Sì: è l'applicazione costante <u>nulla</u>.

d. Sì:

1: $\lambda_1\varphi(P_1)+\lambda_2\varphi(P_2)=\underline{\lambda_1\left(P_1(1)\ ,\ P_1(2)\ ,\ P_1(-1)\right)+\lambda_2\left(P_2(1)\ ,\ P_2(2)\ ,\ P_2(-1)\right)}$

2: $\varphi(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)=\underline{\left((\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(1)\ ,\ (\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(2)\ ,\ (\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(-1)\right)}$

Dato che per definizione di somma di polinomi e di prodotto di un polinomio per uno scalare si ha: $\lambda_1P_1(1)+\lambda_2P_2(1)=(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(1)$ etc., allora i due vettori sottolineati coincidono.

e. Sì:

1: $\lambda_1\varphi(v_1)+\lambda_2\varphi(v_2)=\underline{\lambda_1(v_1\cdot(1,2,0)\ ,\ v_1\cdot(2,0,-1))+\lambda_2(v_2\cdot(1,2,0)\ ,\ v_2\cdot(2,0,-1))}$

2: $\varphi(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2)=\underline{\left((\lambda_1v_1+\lambda_2v_2)\cdot(1,2,0)\ ,\ (\lambda_1v_1+\lambda_2v_2)\cdot(2,0,-1)\right)}$

e i due vettori sottolineati coincidono per le note proprietà dei prodotti scalari.

f. No: in generale $\varphi(A)+\varphi(B)\neq\varphi(A+B)$ dato che esistono molte matrici A,B tali che: $\det(A)+\det(B)\neq\det(A+B)$, per esempio $A=I$ e $B=I$.

g. Sì:

1: $\lambda_1\varphi(f_1)+\lambda_2\varphi(f_2)=\underline{\lambda_1(xf_1'-f_1'')+\lambda_2(xf_2'-f_2'')}$

2: $\varphi(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)=\underline{x(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)'-(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)''}$

e, dato che per le note proprietà delle derivate si ha:
$\lambda_1f_1'(x)+\lambda_2f_2'(x)=(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)'(x)$ e $\lambda_1f_1''(x)+\lambda_2f_2''(x)=(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)''(x)$, le due funzioni sottolineate coincidono.

h. Sì: simile a d., dato che per definizione di somma di funzioni e di prodotto di una funzione per uno scalare valgono le uguaglianze di funzioni:
$\lambda_1f_1(x)+\lambda_2f_2(x)=(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)(x)$
$\lambda_1f_1(x+1)+\lambda_2f_2(x+1)=(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)(x+1)$

i. Sì: simile a g. e h.

02. Il nucleo è costituito dai vettori (x,y,z) tali che $\varphi(x,y,z)=0$ cioè tali che $(x+y-z\ ,\ 2x-y\ ,\ 3x-z\ ,\ 3y-2z)=(0,0,0,0)$.

Quindi occorre risolvere il sistema: $\begin{cases}x+y-z&=&0\\2x-y&=&0\\3x-z&=&0\\3y-2z&=&0\end{cases}$ le cui soluzioni sono: $\begin{cases}x&=&(1/3)z\\y&=&(2/3)z\\z&=&z\end{cases}$

Perciò $\ker\varphi=\{(1/3\ ,\ 2/3\ ,\ 1)z\}$. Una base per $\ker\varphi$ è per esempio costituita dal vettore $(1/3,2/3,1)$ oppure dal vettore $(1,2,3)$.

Si ha ora: $\dim(\operatorname{Im}\varphi)=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(\ker\varphi)=2$. Quindi per avere una base di $\operatorname{Im}\varphi$ basta trovarne due vettori linearmente indipendenti.

Calcoliamo per esempio: $\varphi(1,0,0)=(1,2,3,0)\quad;\quad\varphi(0,1,0)=(1,-1,0,3)$.

I vettori $(1,2,3,0)\quad,\quad(1,-1,0,3)$ appartengono a $\operatorname{Im}\varphi$, sono due, sono linearmente indipendenti, pertanto costituiscono una base per $\operatorname{Im}\varphi$.

03. a. Perché $(1,2),(1,1)$ è una base per $\mathbb{R}^2$.

b. Esprimiamo $(1,0)$ e $(0,1)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,2)$ e $(1,1)$. Come si calcola facilmente:
$(1,0)=-(1,2)+2(1,1)$ da cui

$\varphi(1,0) = -\varphi(1,2) + 2\varphi(1,1) = -(0,2,2) + 2(2,1,0) = (4,0,-2)$.
Analogamente si calcola:
$(0,1) = 1(1,2) - 1(1,1)$ e quindi:
$\varphi(0,1) = \varphi(1,2) - \varphi(1,1) = (0,2,2) - (2,1,0) = (-2,1,2)$.
Poiché $\dim(\operatorname{Im}\varphi) + \dim(\ker\varphi) = \dim(\mathbb{R}^2)$, allora $\dim(\operatorname{Im}\varphi)$ non può essere più di 2. I due vettori $(0,2,2),(2,1,0)$ appartengono evidentemente a $\operatorname{Im}\varphi$ e sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$ ed essi ne costituiscono una base.

04. La verifica della linearità di φ è analoga a quella dello 01. g.
Per verificare che φ è effettivamente applicazione di $\mathbb{R}_3[x]$ in sé, occorre verificare che, per ogni $P(x)$, $\varphi(P(x))$ appartiene a $\mathbb{R}_3[x]$, ma si verifica subito che, per ogni $P(x)$, $\varphi(P(x))$ ha grado minore o uguale a 3, cioè $\varphi(P(x)) \in \mathbb{R}_3[x]$.
Per determinare $\ker\varphi$ si pone $\varphi(a + bx + cx^2 + dx^3) = 0$ ovvero:
$(3x+1)(a + bx + cx^2 + dx^3) + (1 - x^2)(b + 2cx + 3dx^2) = 0$ da cui
$(a+b) + (3a + b + 2c)x + (2b + c + 3d)x^2 + (c + d)x^3 = 0$ (uguaglianza di polinomi)
Perciò si ha: $\begin{cases} a+b & = 0 \\ 3a + b + 2c = 0 \\ \dots\dots \end{cases}$ sistema con ∞^1 soluzioni: $\begin{cases} a = d \\ b = -d \\ c = -d \end{cases}$.
Quindi $\ker\varphi$ ha dimensione 1 e una sua base è per esempio $1 - x - x^2 + x^3$.
Com'è noto, $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$ e pertanto $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 3$. La base "canonica" di $\mathbb{R}_3[x]$ è $1, x, x^2, x^3$, quindi una base per $\operatorname{Im}\varphi$ è per esempio data dai tre vettori $\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2)$ (se sono linearmente indipendenti). Essi sono $1+3x$, $1+x+2x^2$, $2x+x^2+x^3$ e la lineare indipendenza si verifica subito perché hanno coordinate rispettivamente $[1\ 3\ 0\ 0]^T$, $[1\ 1\ 2\ 0]^T$, $[0\ 2\ 1\ 1]^T$ rispetto alla base "canonica" di $\mathbb{R}_3[x]$.

05. 1: $\lambda_1\varphi(X_1) + \lambda_2\varphi(X_2) = \underline{(\lambda_1 X_1 \cdot B + \lambda_2 X_2 \cdot B)}$
2: $\varphi(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \underline{(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) \cdot B}$
e le due matrici sottolineate notoriamente coincidono. Per calcolare $\ker\varphi$ si pone $\varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cioè $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ da cui: $\begin{cases} x = 2y \\ z = 2t \end{cases}$. Il sistema ha ∞^2 soluzioni, quindi $\ker\varphi$ ha dimensione 2 e una sua base è per esempio $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Quindi $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$. Una base per $\operatorname{Im}\varphi$ è per esempio $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (sono rispettivamente $\varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\varphi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sono due e linearmente indipendenti).

06. La verifica della linearità è analoga a quella dello 05.
Per quanto riguarda il nucleo, evidentemente $X \in \ker\varphi$ se $X \cdot B = B \cdot X$, se cioè X commuta con B. Per esempio I e B stessa commutano con B, quindi appartengono a $\ker\varphi$. Dato che sono linearmente indipendenti, allora $\ker\varphi$ ha almeno dimensione 2. D'altra parte si ha $\varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $\varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Questi vettori sono linearmente indipendenti e appartengono a $\operatorname{Im}\varphi$ che ha perciò ugualmente dimensione almeno 2. In conclusione $\dim(\ker\varphi) = \dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2$ e ne abbiamo già trovato due basi.

07. La verifica della linearità è analoga a quella dello 01. h. Il nucleo è costituito dai vettori (a,b,c) tali che $a \cdot \sin(x) + b \cdot \sin(x-2) + c \cdot \sin(x-3) = 0$ (uguaglianza di funzioni), cioè (usando note formule trigonometriche) $(a + b \cdot \cos(2) + c \cdot \cos(3)) \cdot \sin(x) - (b \cdot \sin(2) + c \cdot \sin(3)) \cdot \cos(x) = 0$ da cui (per la nota lineare indipendenza di $\sin(x)$ e $\cos(x)$): $\begin{cases} a + b \cdot \cos(2) + c \cdot \cos(3) = 0 \\ b \cdot \sin(2) + c \cdot \sin(3) = 0 \end{cases}$.
Risolvendo il sistema lineare omogeneo ridotto in a,b,c si vede che ha le ∞^1 soluzioni $\left(\frac{\sin(3)\cos(2) - \sin(2)\cos(3)}{\sin(2)} c \, , \, -\frac{\sin(3)}{\sin(2)} c \, , \, c\right)$. Quindi $\ker\varphi$ ha dimensione 1 e, usando note formule trigonometriche, si trova come suo generatore (e quindi come base per $\ker\varphi$) per esempio il vettore $(\sin(1)\ ,\ -\sin(3)\ ,\ \sin(2))$.

11. La matrice A_φ^{KK} è ovvia (sono semplicemente i coefficienti delle equazioni che definiscono φ):
Per quanto riguarda $A_\varphi^{\mathcal{BD}}$ basta calcolare:
   - $\varphi(1,1,0) = (1,2,0,1)$ che ha evidentemente coordinate $[1\ 0\ 0\ 0]^T$ risp. a $\mathcal{D}$ (è il primo vettore). La prima colonna è $[1\ 0\ 0\ 0]^T$.
   - $\varphi(0,1,0) = (0,2,-1,1)$ che ha coordinate $[a\ b\ c\ d]^T$ rispetto a $\mathcal{D}$. Quindi $(0,2,-1,1) = a(1,2,0,1) + b(0,1,0,0) + c(0,0,-1,1) + d(0,0,1,0)$, da cui il sistema lineare $\{0 = a\ ;\ 2 = 2a+b\ ;\ -1 = -c+d\ ;\ 1 = a+c\}$ e, immediatamente $\{a = 0\ ;\ b = 2\ ;\ c = 1\ ;\ d = 0\}$. La seconda colonna è $[0\ 2\ 1\ 0]^T$.
   - $\varphi(0,1,1) = (1,4,-1,2)$ che ha coordinate $[a\ b\ c\ d]^T$ rispetto a $\mathcal{D}$. Quindi $(1,4,-1,2) = a(1,2,0,1) + b(0,1,0,0) + c(0,0,-1,1) + d(0,0,1,0)$, da cui il sistema lineare $\{1 = a\ ;\ 4 = 2a+b\ ;\ -1 = -c+d\ ;\ 2 = a+c\}$ e, immediatamente $\{a = 1\ ;\ b = 2\ ;\ c = 1\ ;\ d = 0\}$. La seconda colonna è $[1\ 2\ 1\ 0]^T$.

$$A_\varphi^{KK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_\varphi^{\mathcal{BD}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Esprimiamo $(0,1,3)$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$. Come si calcola subito, si ha: $(0,1,3) = 0\cdot(1,1,0) + (-2)(0,1,0) + 3\cdot(0,1,1)$. Pertanto:
$\varphi(0,1,3) = 0\cdot\varphi(1,1,0) + (-2)\varphi(0,1,0) + 3\cdot\varphi(0,1,1)$.
Occorre quindi conoscere $\varphi(1,1,0), \varphi(0,1,0), \varphi(0,1,1)$:
•$\varphi(1,1,0)$ è il vettore che ha coordinate $[1\ 3]^T$ (1^a colonna della matrice) rispetto a $\mathcal{D}$, cioè $1\cdot(2,0) + 3\cdot(1,1) = (5,3)$
•$\varphi(0,1,0)$ è il vettore che ha coordinate $[0\ \ -1]^T$ (2^a colonna della matrice) rispetto a $\mathcal{D}$, cioè $0\cdot(2,0) + (-1)\cdot(1,1) = (-1,-1)$
•$\varphi(0,1,1)$ è il vettore che ha coordinate $[2\ 0]^T$ (3^a colonna della matrice) rispetto a $\mathcal{D}$, cioè $2\cdot(2,0) + 0\cdot(1,1) = (4,0)$.
In conclusione: $\varphi(0,1,3) = 0\cdot(5,3) + (-2)(-1,-1) + 3\cdot(4,0) = (14,2)$. Per calcolare $\varphi^{-1}(2,1)$ occorre risolvere l'equazione $\varphi(v) = (2,1)$. Dato che $(2,1)$ ha coordinate $[1/2\quad 1]$ rispetto a $\mathcal{D}$, se v ha coordinate $[x\ y\ z]^T$ rispetto a $\mathcal{B}$ si ha:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Risolvendo : } \begin{cases} x = 1/2 - 2z \\ y = 1/2 - 6z \end{cases}.$$
In conclusione v ha coordinate $[x\ y\ z]^T = [1/2 - 2z \qquad 1/2 - 6z \qquad z]^T$ rispetto a $\mathcal{B}$, cioè: $v = (1/2 - 2z)\cdot(1,1,0) + (1/2 - 6z)\cdot(0,1,0) + z\cdot(0,1,1) = (1/2 - 2z\ ,\ 1 - 7z\ ,\ z)$. Quindi si ha: $\varphi^{-1}(2,1) = \{(1/2 - 2z\ ,\ 1 - 7z\ ,\ z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Per calcolare A_φ^K basta osservare che con conti analoghi a quello fatto per $\varphi(0,1,3)$ si trova: $\varphi(1,0,0) = (6,4)$; $\varphi(0,1,0) = (-1,-1)$; $\varphi(0,0,1) = (5,1)$ per cui $A_\varphi^{KK} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Dalla matrice A_φ^{KK} si ricava subito $\ker\varphi$. Una sua base è per esempio $(-2,-7,1)$. Dato che $\dim(\ker\varphi) = 1$, allora $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = 2$ quindi $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}^2$; una base per $\mathrm{Im}\,\varphi$ è per esempio quella canonica.

13. I conti sono analoghi a quelli fatti nel 12. Si ricava: $\varphi(1\ ,\ i\ ,\ 0) = (1+2i\ ,\ 1)$; $\varphi^{-1}(1\ ,\ i) = \emptyset$. Una base per $\ker\varphi$ è per esempio $(1,i,i)$, $(0,1,0)$; una per $\mathrm{Im}\,\varphi$ è per esempio $(1+2i,1)$.

14. Si osservi che l'ultima colonna della matrice è nulla per cui il terzo vettore della base di $\mathbb{R}^3$ dovrà essere un vettore di $\ker\varphi$, per esempio $(1,1,-1)$. Completando in qualche modo questo vettore a base per $\mathbb{R}^3$, scegliamo come base $(1,0,0), (0,1,0), (1,1,-1)$.
dalla matrice si deduce subito che $\varphi(1,0,0)$ è il primo vettore della base di $\mathbb{R}^4$ e che $\varphi(0,1,0)$ è il secondo vettore. Qundi la scelta dei primi due vettori della base di $\mathbb{R}^4$ è obbligata in conseguenza della scelta della base di $\mathbb{R}^3$. Dato che $\varphi(1,0,0) = (1,0,1,0)$ e $\varphi(0,1,0) = (0,2,-1,1)$, come base di $\mathbb{R}^4$ possiamo scegliere esempio: $(1,0,1,0), (0,2,-1,1), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$. Infatti gli ultimi due vettori della base di $\mathbb{R}^4$ non influiscono sulla matrice.

15. Per determinare una base per $\ker(f)$ risolviamo il sistema omogeneo associato ad A:

$$\begin{cases} 3x+2y+6z = 0 \\ 5y = 0 \\ x-y+2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+6z = 0 \\ y = 0 \\ x+2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+6z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ha quindi ∞^1 soluzioni che sono $(-2z, 0, z)$. Una base per $\ker(f)$ è quindi $(-2, 0, 1)$.

Dato che $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 2$, allora come base di $\mathrm{Im}\,(f)$ si possono prendere due vettori che abbiano le coordinate di due colonne linearmente indipendenti di A, per esempio: $(3, 0, 1)$ e $(2, 5, -1)$.

Calcoliamo ora $A^{\mathcal{B}\mathcal{B}}$. Si ha:

- $f(1, 1, 0) = (5, 5, 0)$ (basta sommare la prima colonna di A con la seconda colonna) e questo vettore ha evidentemente coordinate $[5\ 0\ 0]^T$ rispetto a $\mathcal{B}$, dato che è 5 volte il primo vettore di $\mathcal{B}$.
- $f(1, 0, 1) = (9, 0, 3)$ (basta sommare la prima colonna di A con la terza colonna) e questo vettore ha coordinate $[a\ b\ c]^T$ rispetto a $\mathcal{B}$, con $a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(0, 0, 1) = (9, 0, 3)$, da cui il sistema $\{a + b = 9\ ;\ a = 0\ ,\ b + c = 3\}$, che ha soluzione $[0\ 9\ -6]$. Queste sono le coordinate.
- $f(0, 0, 1) = (6, 0, 2)$ che ha coordinate $[a\ b\ c]^T$ rispetto a $\mathcal{B}$, con $a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(0, 0, 1) = (6, 0, 2)$, da cui il sistema lineare $\{a + b = 6\ ;\ a = 0\ ,\ b + c = 2\}$, che ha soluzione $[0\ 6\ -4]$. Queste sono le coordinate.

$$A_f^{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Da questi dati si scrive subito la matrice.

16. a. Perché $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 2)$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

b. $f(1, 0, 0, 1) = (2, 0, 0, 2)$ che ha coordinate $[2\ 0\ 0\ 0]^T$ rispetto a $\mathcal{B}$.
$f(0, 1, 1, 0) = (1, 1, 1, 1)$ che ha coordinate $[1\ 1\ 0\ 0]^T$ (è il primo vettore più il secondo).
$f(1, 2, 0, 0) = (0, 0, 0, 2)$ che ha coordinate $[0\ 0\ 0\ 1]^T$ (è il quarto vettore).
$f(0, 0, 0, 2) = (0, 1, 1, 4)$ che ha coordinate $[0\ 1\ 0\ 2]^T$ (è il secondo vettore più due volte il quarto).
Da qui la matrice che è: $A_f^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c. La matrice $A^{\mathcal{B}}$ si riduce scambiando R_3 con R_4 ed ha evidentemente caratteristica 3, per cui $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 3$ e $\dim(\ker(f)) = 1$. Si ricavano immediatamente dalla definizione di f tre vettori linearmente indipendenti di $\mathrm{Im}\,(f)$ e sono per esempio $(2, 0, 0, 2)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(0, 0, 0, 2)$. Quindi questa è una base per $\mathrm{Im}\,(f)$.
Per quanto riguarda $\ker(f)$ risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice:
$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ y + t = 0 \\ z + 2t = 0 \end{cases}$. Le ∞^1 soluzioni sono: $(t/2, -t, -2t, t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$ e forniscono <u>le coordinate</u> rispetto a $\mathcal{B}$ dei vettori del nucleo. Quindi una base per $\ker(f)$ è per esempio data dal vettore di coordinate $(1/2, -1, -2, 1)$ che è :
$1/2(1, 0, 0, 1) - (0, 1, 1, 0) - 2(1, 2, 0, 0) + (0, 0, 0, 2) = (-3/2\ ,\ -5\ ,\ -1\ ,\ 5/2)$

d. Per questo occorre conoscere $A_f^{\mathcal{B}\mathcal{B}}$. Calcoliamo subito:

- $f(0, 0, 0, 1) = (0, 1/2, 1/2, 2)$ (dalla quarta uguaglianza che definisce f).
- $f(1, 0, 0, 0) = f(1, 0, 0, 1) - f(0, 0, 0, 1) = (2, 0, 0, 2) - (0, 1/2, 1/2, 2) = (2, -1/2, -1/2, 0)$
- $f(0, 1, 0, 0) = f(1/2, 1, 0, 0) - f(1/2, 0, 0, 0)$. Queste due immagini le abbiamo già: $f(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 1) - (1, -1/4, -1/4, 0) = (-1, 1/4, 1/4, 1)$
- $f(0, 0, 1, 0) = f(0, 1, 1, 0) - f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 1, 1) - (-1, 1/4, 1/4, 1) = (2, 3/4, 3/4, 0)$.

Quindi $A_f^{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ -1/2 & 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Immediatamente si ha:

$f(x, y, z, t) = (2x - y + 2z\ ,\ -1/2x + 1/4y + 3/4z + 1/2t\ ,\ -1/2x + 1/4y + 3/4z + 1/2t\ ,\ y + 2t)$.

17. La verifica della linearità di φ è analoga a quella dello 01. g.
Per scrivere $A^{\mathcal{B}}_{\varphi}$ basta calcolare
$\varphi(1) = 0$; $\varphi(x) = 1$; $\varphi(x^2) = 0$; $\varphi(x^3) = -3x^2$ e la matrice è immediata.
Una base per $\ker\varphi$ si ricava risolvendo il sistema omogeneo associato a questa matrice, che ha ovviamente le ∞^2 soluzioni $(x, 0, z, 0)$. Quindi una base è per esempio 1 , x^2 .

$$A^{\mathcal{B}}_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per scrivere $A^{\mathcal{D}}_{\varphi}$ occorre calcolare:
• $\varphi(1) = 0$
• $\varphi(x+1) = 1$ (che ha coordinate $[1\ 0\ 0\ 0]^T$ rispetto a $\mathcal{D}$)
• $\varphi(x+1)^2 = 2$ (che ha coordinate $[2\ 0\ 0\ 0]^T$ rispetto a $\mathcal{D}$)
• $\varphi(x+1)^3 = -3x^2+3$ (che ha coordinate $[0\ 6\ -3\ 0]^T$ rispetto a $\mathcal{D}$ dato che $-3x^2+3 = 6(x+1) - 3(x+1)^2$.

$$A^{\mathcal{D}}_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

18. La verifica della linearità di φ è analoga a quella dello 01. g. Si noti inoltre che qualunque sia $P(x)$, $\varphi(P(x))$ appartiene a W perché ha grado minore di 4 e ha la radice 1. Lo spazio W non ha dimensione 4, perché non coincide con $\mathbb{R}_3[x]$ e ha dimensione 3 perché per esempio i tre vettori $(x-1), x(x-1), x^2(x-1)$ appartengono a W e sono linearmente indipendenti dato che hanno gradi differenti. Quindi questa può essere scelta come base $\mathcal{B}$. Per quanto riguarda la matrice:

- $\varphi(x-1) = (x-1)$ che ha coordinate $[1\ 0\ 0]^T$ rispetto a $\mathcal{B}$.
- $\varphi(x(x-1)) = (2x-1)(x-1) = -(x-1) + 2x(x-1)$. Ha quindi coordinate $[-1\ 2\ 0]^T$.
- $\varphi(x^2(x-1)) = (3x^2-2x)(x-1) = -2x(x-1) + 3x^2(x-1)$. Ha coordinate $[0\ -2\ 3]^T$.

La matrice è pertanto: $A^{\mathcal{B}\mathcal{B}}_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

19. La verifica della linearità di φ è analoga a quella dello 01. h. Per calcolare la matrice basta osservare che:
• $\varphi(\sin(x)) = \sin(x + \pi/3) = \sin(x)\cos(\pi/3) + \cos(x)\sin(\pi/3)$
• $\varphi(\cos(x)) = \cos(x + \pi/3) = -\sin(x)\sin(\pi/3) + \cos(x)\cos(\pi/3)$
La matrice è pertanto $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

20. Si ha: $\varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha coordinate $[1\ -2\ 0\ 0]^T$ rispetto alla base canonica. Analogamente si calcolano $\varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ etc.
La matrice associata è quindi la matrice a blocchi: $A^{KK}_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

21. I due sistemi lineari a lato non hanno soluzione e per questo motivo le controimmagini dei due vettori sono vuote. Per determinare $\varphi^{-1}(U)$ vanno invece risolte le infinite equazioni in v: $\varphi(v) = a(2,0,1,0) + b(0,2,0,1)$ (infinite al variare di a e b). Ponendo $v = (x, y, z)$ si ottengono i sistemi (1) nelle incognite x, y, z che risultano avere soluzioni se e solo se $a = b$. Le soluzioni sono sempre ∞^1 e sono espresse dalle (2). Quindi i vettori di $\varphi^{-1}U$ sono $(2a - z\ ,\ a - z\ ,\ z) = a(2,1,0) + z(-1,-1,1)$ al variare di a, z e una base per $\varphi^{-1}(U)$ è quindi per esempio $(2,1,0)$, $(-1,-1,1)$.

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ 2y + 2z = 0 \\ x - y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + 2z = 2 \\ x - y = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} x + z = 2a \\ 2y + 2z = 2b \\ x - y = a \\ y + z = b \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x = 2a - z \\ y = a - z \\ z = z \end{cases}$$

22. La condizione $\ker\varphi \neq \{0\}$ significa che $\ker\varphi$ è un insieme infinito (è un sottospazio). Sia $v \in \varphi^{-1}(w)$ (v esiste dato che $\varphi^{-1}(w) \neq \emptyset$). Allora come si verifica subito, tutti i vettori del tipo $v + v_1$ con $v_1 \in \ker\varphi$ stanno in $\varphi^{-1}(w)$ perché $\varphi(v + v_1) = \varphi(v) + \varphi(v_1) = w + 0 = w$ e sono infiniti.

23. L'applicazione φ è surgettiva perché per ogni terna (a, b, c) esiste sempre un polinomio $P(x)$ tale che $P(1) = a$, $P(2) = b$, $P(3) = c$ (per esempio è facile calcolarne uno di grado due). Il nucleo è costituito da tutti e soli i polinomi del tipo $P(x) = Q(x)(x-1)(x-2)(x-3)$ e non ha dimensione finita dato che contiene polinomi di tutti i gradi da 3 in poi e n polinomi di n gradi differenti sono linearmente indipendenti.

24. Si ha:

    1: $\lambda_1\varphi(z_1) + \lambda_2\varphi(z_2) = \underline{\lambda_1\overline{z_1} + \lambda_2\overline{z_2}}$

    2: $\varphi(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \overline{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2} = \underline{\overline{\lambda_1}\,\overline{z_1} + \overline{\lambda_2}\,\overline{z_2}}$

    Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora $\lambda_1 = \overline{\lambda_1}$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_2}$ per cui i due numeri sottolineati coincidono quindi φ è $\mathbb{R}$-lineare.
    Non è $\mathbb{C}$-lineare perché per esempio $i \cdot \varphi(i) = i \cdot (-i) = 1$ e $\varphi(i \cdot i) = \varphi(-1) = -1$.
    Calcoliamo la matrice:
    $\varphi(1) = 1 = 1 \cdot (1) + 0 \cdot (1 + i)$
    $\varphi(1 + i) = 1 - i = 2 \cdot (1) - 1 \cdot (1 + i)$
    La matrice associata è quindi $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

30. Per esempio
    $\varphi_1(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$; $\varphi_1(0, 1, 0) = (1, 0, 1)$; $\varphi_1(0, 0, 1) = (1, -1, 0)$
    $\varphi_2(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$; $\varphi_2(0, 1, 0) = (1, -1, 0)$; $\varphi_2(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$.
    Le due trasformazioni lineari sono completamente definite perché $(1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ ed è evidente quali siano il loro nucleo e la loro immagine.

31. Completiamo $(1, 1, 1)$ a base per $\mathbb{R}^3$ per esempio con $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Cerchiamo due altri vettori di $\mathbb{R}^4$ linearmente indipendenti con $(1, 2, 0, -1)$ e poniamo quindi per esempio
    $\varphi(1, 1, 1) = (1, 2, 0, -1)$ $\quad\varphi(0, 1, 0) = (0, 0, 1, 1)$ $\quad\varphi(0, 0, 1) = (1, 1, 0, 0)$.
    L'applicazione φ è completamente definita perché $(1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
    Evidentemente $\operatorname{Im}\varphi = L\{(1, 2, 0, -1)\,, (0, 0, 1, 1)\,, (1, 1, 0, 0)\}$. Quindi $(1, 0, 0, 0)$ non appartiene a $\operatorname{Im}\varphi$ perché, come si verifica subito, il sistema lineare in x, y, z
    $(1, 0, 0, 0) = x(1, 2, 0, -1) + y(0, 0, 1, 1) + z(1, 1, 0, 0)$ non ha soluzioni. Analogamente nessuno degli altri tre vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ sta in $\operatorname{Im}\varphi$.
    La scelta dei due vettori di $\mathbb{R}^4$ è stata fatta in modo casuale. Se per caso un qualche vettore della base canonica di $\mathbb{R}^4$ appartenesse a $\operatorname{Im}\varphi$, occorrerebbe modificare questa scelta.
    Dato poi che $\operatorname{Im}\varphi$ ha dimensione 3, allora $\dim(\ker\varphi) = 0$ per cui l'applicazione è iniettiva.

32. Completiamo $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 2, 2)$ base di $\mathbb{R}^4$ per esempio con $(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ e poniamo quindi:
    $\varphi(1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$ $\quad\varphi(0, 1, 2, 2) = (0, 0, 0, 0)$
    $\varphi(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 0, 1)$ $\quad\varphi(0, 0, 0, 1) = (0, 1, 2, 2)$
    L'applicazione è completamente definita e nucleo e immagine sono evidentemente V, come si verifica immediatamente.

33. a. No, perché $\dim(\operatorname{Im}\varphi) + \dim(\ker\varphi) = \dim(\mathbb{R}^3)$.
    b. Sì, per esempio l'applicazione identicamente nulla.

34. Una base per $\operatorname{Im}\varphi$ è per esempio $(x-1)^2$, $(x-1)^3$. Quindi si può per esempio porre:
    $\varphi(1) = 0$; $\varphi(x) = 0$; $\varphi(x^2) = 0$; $\varphi(x^3) = (x-1)^2$; $\varphi(x-1)^4 = (x-1)^3$.
    φ è completamente definita perché 1 , x , x^2 , x^3 , $(x-1)^4$ è base per $\mathbb{R}_4[x]$.

35. Una base per $\ker\varphi$ è per esempio $(x-1)$, $(x-1)x$, $(x-1)x^2$. Si può definire φ così:
    $\varphi(x-1) = 0$ $\quad\varphi((x-1)x) = 0$ $\quad\varphi((x-1)x^2) = 0$ $\quad\varphi((x+1)^2 = I$
    Dato che $(x+1)^2$ completa la base di $\ker\varphi$ a base di $\mathbb{R}_3[x]$, l'applicazione è completamente definita e verifica le condizioni richieste, come si verifica immediatamente.

36. Perché $(1, 2, 2) = (1, 0, 1) + (0, 1, 0) + (0, 1, 1)$, ma $(4, 5, 6) \neq (3, 0, 1) + (0, 0, 1) + (0, 1, 0)$.

37. Esprimiamo $(2, a)$ come combinazione lineare dei due vettori $(1, 1), (0, 1)$ che costituiscono base per $\mathbb{R}^2$. Si ha: $(2, a) = 2(1, 1) + (a - 2)(0, 1)$.
Quindi $\varphi(2, a) = 2\varphi(1, 1) + (a - 2)\varphi(0, 1) = 2(3, 1, 1) + (a - 2)(0, 1, 1) = (6, a, a)$
Il vettore $(6, a, a)$ appartiene a $L\{(1, -1, 0), (2, 1, -1)\}$ per $a = -3/2$, dato che il sistema lineare in x, y $\begin{cases} 6 &= x + 2y \\ y &= -x + y \\ z &= -y \end{cases}$ ha soluzioni solo per $a = -3/2$,

38. Non è possibile soddisfare tutte le condizioni richieste perché, se $\varphi(1, 0, 1) = (0, 1, 1)$, allora $\varphi(2, 0, 2) = (0, 2, 2)$, quindi la condizione è incompatibile.

39. Da $\varphi(1, 2, 0) = \varphi(0, 0, -1)$ si ha: $\varphi((1, 2, 0) - (0, 0, -1)) = (0, 0, 0)$. Quindi si ha $(1, 2, 1) \in \ker\varphi$. Se quindi poniamo $\ker\varphi = L\{(1, 2, 1)\}$ e $\operatorname{Im}\varphi = L\{(1, 2, 1), (0, 0, 1)\}$ si hanno tutte le condizioni richieste e l'applicazione può essere per esempio così definita:
$\varphi(1, 2, 1) = (0, 0, 0) \qquad \varphi(0, 1, 0) = (1, 2, 1) \qquad \varphi(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$

40. Perché, nonostante i tre vettori $(1, 1, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$ siano linearmente dipendenti, la loro relazione di lineare dipendenza (essenzialmente unica, a meno di fattore di proporzionalità) che è: $(1, 1, 2) - (0, 1, 1) - (1, 0, 1) = (0, 0, 0)$ è compatibile con φ dato che $\varphi(1, 1, 2) - \varphi(0, 1, 1) - \varphi(1, 0, 1) = \varphi(0, 0, 0)$ come si verifica subito.
Non è unica perché le tre condizioni si riducono a due sole.
Quindi un'applicazione lineare che soddisfi l'ultima condizione può essere per esempio:
$\varphi(1, 1, 2) = (2, 2, 1) \qquad \varphi(0, 1, 1) = (0, 1, 1) \qquad \varphi(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$