COMPOSIZIONI, INVERSE, ENDOMORFISMI

F 41. Siano φ e ψ applicazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ in sé così definite:
$\varphi(x,y,z)=(x+y\ ,\ y\ ,\ y)$ $\qquad\psi(x,y,z)=(x+z\ ,\ z-x\ ,\ x)$.
Descrivere $\varphi\circ\psi$, $y\circ\psi$, φ^2 , ψ^2 e determinare basi per i loro nuclei e le loro immagini.

F 42. Sia $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $\varphi(x,y,z)=(2x-y\ ,\ y-2z\ ,\ x-z)$.
a. Calcolare $\varphi(1,1,1)$, $\varphi^2(1,1,1)$, $\varphi^3(1,1,1)$ e $\varphi^{-1}(1,1,1)$.
b. Dire che applicazione è φ^2-1 e dimostrare che è bigettiva.

C 43. Sia $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ $\varphi(x,y,z)=(x+y\ ,\ 3y-z)$. Risolvere tra i seguenti due problemi quello che ha soluzione e dire perché l'altro non ne ha:
a. Definire $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tale che $\psi\circ\varphi=1$. (cosa significa 1 ?)
b. Definire $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tale che $\varphi\circ\psi=1$. (cosa significa 1 ?)

F 44. Sia $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $\varphi(x,y,z)=(z,x,-y)$. Provare che esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che $\varphi^n=1$. Dedurne che φ è invertibile e che φ^{-1} è una potenza di φ.

45. Sia $V=L\{\cos(x),\sin(x)\}\subset C^\infty(\mathbb{R})$

C a. Sia $\varphi:V\to V$ l'applicazione lineare definita come $\varphi(f(x))=f(x+\pi/3)$. Provare che esiste un $n\in\mathbb{N}$ tale che $\varphi^n=1$ e determinare il minimo di questi n.

A b. Sia $\alpha\in\mathbb{R}$ e sia $\varphi:V\to V$ l'applicazione lineare definita come $\varphi(f(x))=f(x+\alpha)$. Dire per quali α esiste un $n\in\mathbb{N}$ tale che $\varphi^n=1$.

F 46. Sia $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $\varphi(x,y,z)=(y\ ,\ y+z\ ,\ -y-z)$. Provare che esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che $\varphi^n=0$ (che cosa significa 0 ?) e determinare il minimo di questi n.

T 47. Siano $\varphi:V\to W$ e $\psi:W\to U$ applicazioni lineari di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Provare che:
a. $\ker\varphi\subset\ker(\psi\circ\varphi)$
b. $\mathrm{Im}\,(\psi\circ\varphi)\subset\mathrm{Im}\,\psi$
c. Se $\psi\circ\varphi=0$ allora $\mathrm{Im}\,\varphi\subset\ker\psi$. È vero il viceversa ?
d. Se φ e ψ sono isomorfismi, allora $\psi\circ\varphi$ è isomorfismo.
e. Se φ e ψ sono iniettive (surgettive), è $\psi\circ\varphi$ iniettiva (surgettiva) ?

T 48. Sia $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tale che $\ker\varphi\neq\{0\}$. Provare che esistono $\alpha,\psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\alpha,\psi\neq0$ tali che $\varphi\circ\alpha=0$, $\psi\circ\varphi=0$.

A 49. Sia $\mathcal{W}$ lo spazio vettoriale costituito da tutte le applicazioni lineari $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. Determinare la dimensione del sottospazio costituito dalle applicazioni lineari φ tali che $\varphi(1,2,3)=(0,0,0)$ e $\varphi(2,0,2)=\varphi(1,1,1)$.

C 50. Sia $\varphi:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$, $\varphi(x,y,z)=(x+y\ ,\ y+z\ ,\ x)$. Provare che φ è invertibile e determinare $\varphi^{-1}(x,y,z)$ per ogni (x,y,z).

A 51. Definire una applicazione lineare $\varphi:\mathbb{C}^5\to\mathbb{C}^5$ tale che $\ker\varphi\subset\mathrm{Im}\,\varphi\subset\ker\varphi^2$ e le dimensioni di questi spazi siano rispettivamente $2,3,4$.

A 52. Sia $\varphi:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4$ l'applicazione lineare definita come $\varphi(x,y,z,t)=(x+y-t\ ,\ x-y\ ,\ 2x-t\ ,\ z)$. Definire un'applicazione lineare $\psi:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4$ tale che, detta ψ_1 la restrizione di ψ a $\mathrm{Im}\,\varphi$ si abbia $\varphi\circ\psi_1=1$.

A 53. Sia $A\in M_{44}(\mathbb{C})$ matrice di caratteristica 3. Dire in quali casi $\varrho(A\cdot B)=3$ se $B\in M_{44}(\mathbb{C})$.

A 54. Sia A la matrice a lato. Determinare $B\in M_{44}(\mathbb{R})$ tale che $A\cdot B=0$ e $B\cdot A$ abbia la massima caratteristica possibile.

A 55. Sia A come in 54. Determinare $B\in M_{44}(\mathbb{R})$ tale che $B\cdot A=0$ e $A\cdot B$ abbia la massima caratteristica possibile.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&1&0&2\\0&-1&2&-1\\2&1&2&3\end{pmatrix}$$

A 56. Sia A come in 54. Determinare $B\in M_{44}(\mathbb{R})$ tale che $A\cdot B=B\cdot A=0$ e B abbia la massima caratteristica possibile.

A 57. Determinare una matrice $B\in M_{44}(\mathbb{C})$ tale che $\varrho(A\cdot B)=2$ e $\varrho(B\cdot A)=3$ (dove A è la matrice a lato)

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&-1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$