

Applicazioni lineari

01. a. Sì:

$$1: \lambda_1\varphi(x_1, y_1) + \lambda_2\varphi(x_2, y_2) = \underline{(\lambda_1(x_1, y_1, \pi y_1) + \lambda_2(x_2, y_2, \pi y_2))}$$

$$2: \varphi(\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2)) = \varphi(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2, \lambda_1y_1 + \lambda_2y_2) = \underline{(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2, \lambda_1y_1 + \lambda_2y_2, \pi(\lambda_1y_1 + \lambda_2y_2))}$$

e i due vettori sottolineati coincidono.

b. No: $\varphi(0, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$.

c. Sì: è l'applicazione costante nulla.

d. Sì:

$$1: \lambda_1\varphi(P_1) + \lambda_2\varphi(P_2) = \underline{\lambda_1(P_1(1), P_1(2), P_1(-1)) + \lambda_2(P_2(1), P_2(2), P_2(-1))}$$

$$2: \varphi(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2) = \underline{((\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2)(1), (\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2)(2), (\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2)(-1))}$$

Dato che per definizione di somma di polinomi e di prodotto di un polinomio per uno scalare si ha: $\lambda_1P_1(1) + \lambda_2P_2(1) = (\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2)(1)$ etc., allora i due vettori sottolineati coincidono.

e. Sì:

$$1: \lambda_1\varphi(v_1) + \lambda_2\varphi(v_2) = \underline{\lambda_1(v_1 \cdot (1, 2, 0), v_1 \cdot (2, 0, -1)) + \lambda_2(v_2 \cdot (1, 2, 0), v_2 \cdot (2, 0, -1))}$$

$$2: \varphi(\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2) = \underline{((\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2) \cdot (1, 2, 0), (\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2) \cdot (2, 0, -1))}$$

e i due vettori sottolineati coincidono per le note proprietà dei prodotti scalari.

f. No: in generale $\varphi(A) + \varphi(B) \neq \varphi(A + B)$ dato che esistono molte matrici A, B tali che: $\det(A) + \det(B) \neq \det(A + B)$, per esempio $A = I$ e $B = I$

g. Sì:

$$1: \lambda_1\varphi(f_1) + \lambda_2\varphi(f_2) = \underline{\lambda_1(xf'_1 - f''_1) + \lambda_2(xf'_2 - f''_2)}$$

$$2: \varphi(\lambda_1f_1 + \lambda_2f_2) = \underline{x(\lambda_1f_1 + \lambda_2f_2)' - (\lambda_1f_1 + \lambda_2f_2)''}$$

e, dato che per le note proprietà delle derivate si ha:

$$\lambda_1f'_1(x) + \lambda_2f'_2(x) = (\lambda_1f_1 + \lambda_2f_2)'(x) \text{ e } \lambda_1f''_1(x) + \lambda_2f''_2(x) = (\lambda_1f_1 + \lambda_2f_2)''(x), \text{ le due funzioni sottolineate coincidono.}$$

h. Sì: simile a d., dato che per definizione di somma di funzioni e di prodotto di una funzione per uno scalare valgono le uguaglianze di funzioni:

$$\lambda_1f_1(x) + \lambda_2f_2(x) = (\lambda_1f_1 + \lambda_2f_2)(x)$$

$$\lambda_1f_1(x+1) + \lambda_2f_2(x+1) = (\lambda_1f_1 + \lambda_2f_2)(x+1)$$

i. Sì: simile a g. e h.

02. Il nucleo è costituito dai vettori (x, y, z) tali che $\varphi(x, y, z) = 0$ cioè tali che $(x + y - z, 2x - y, 3x - z, 3y - 2z) = (0, 0, 0, 0)$.

Quindi occorre risolvere il sistema:
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$
 le cui soluzioni sono:
$$\begin{cases} x = (1/3)z \\ y = (2/3)z \\ z = z \end{cases}$$

Perciò $\ker \varphi = \{(1/3, 2/3, 1)z\}$. Una base per $\ker \varphi$ è per esempio costituita dal vettore $(1/3, 2/3, 1)$ oppure dal vettore $(1, 2, 3)$.

Si ha ora: $\dim(\text{Im } \varphi) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker \varphi) = 2$. Quindi per avere una base di $\text{Im } \varphi$ basta trovarne due vettori linearmente indipendenti.

Calcoliamo per esempio: $\varphi(1, 0, 0) = (1, 2, 3, 0)$; $\varphi(0, 1, 0) = (1, -1, 0, 3)$.

I vettori $(1, 2, 3, 0)$, $(1, -1, 0, 3)$ appartengono a $\text{Im } \varphi$, sono due, sono linearmente indipendenti, pertanto costituiscono una base per $\text{Im } \varphi$.

03. a. Perché $(1, 2), (1, 1)$ è una base per \mathbb{R}^2 .

b. Esprimiamo $(1, 0)$ e $(0, 1)$ come combinazione lineare dei vettori $(1, 2)$ e $(1, 1)$. Come si calcola facilmente:

$$(1, 0) = -(1, 2) + 2(1, 1) \text{ da cui}$$

$$\varphi(1, 0) = -\varphi(1, 2) + 2\varphi(1, 1) = -(0, 2, 2) + 2(2, 1, 0) = (4, 0, -2).$$

Analogamente si calcola:

$$(0, 1) = 1(1, 2) - 1(1, 1) \text{ e quindi:}$$

$$\varphi(0, 1) = \varphi(1, 2) - \varphi(1, 1) = (0, 2, 2) - (2, 1, 0) = (-2, 1, 2).$$

Poiché $\dim(\text{Im } \varphi) + \dim(\text{ker } \varphi) = \dim(\mathbb{R}^2)$, allora $\dim(\text{Im } \varphi)$ non può essere più di 2. I due vettori $(0, 2, 2)$, $(2, 1, 0)$ appartengono evidentemente a $\text{Im } \varphi$ e sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$ ed essi ne costituiscono una base.

04. La verifica della linearità di φ è analoga a quella dello 01. g.

Per verificare che φ è effettivamente applicazione di $\mathbb{R}_3[x]$ in sé, occorre verificare che, per ogni $P(x)$, $\varphi(P(x))$ appartiene a $\mathbb{R}_3[x]$, ma si verifica subito che, per ogni $P(x)$, $\varphi(P(x))$ ha grado minore o uguale a 3, cioè $\varphi(P(x)) \in \mathbb{R}_3[x]$.

Per determinare $\text{ker } \varphi$ si pone $\varphi(a + bx + cx^2 + dx^3) = 0$ ovvero:

$$(3x + 1)(a + bx + cx^2 + dx^3) + (1 - x^2)(b + 2cx + 3dx^2) = 0 \text{ da cui}$$

$$(a + b) + (3a + b + 2c)x + (2b + c + 3d)x^2 + (c + d)x^3 = 0 \text{ (uguaglianza di polinomi)}$$

$$\text{Perciò si ha: } \begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + b + 2c = 0 \\ \dots \end{cases} \text{ sistema con } \infty^1 \text{ soluzioni: } \begin{cases} a = d \\ b = -d \\ c = -d \end{cases}.$$

Quindi $\text{ker } \varphi$ ha dimensione 1 e una sua base è per esempio $1 - x - x^2 + x^3$.

Com'è noto, $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$ e pertanto $\dim(\text{Im } \varphi) = 3$. La base "canonica" di $\mathbb{R}_3[x]$ è $1, x, x^2, x^3$, quindi una base per $\text{Im } \varphi$ è per esempio data dai tre vettori $\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2)$ (se sono linearmente indipendenti). Essi sono $1 + 3x, 1 + x + 2x^2, 2x + x^2 + x^3$ e la lineare indipendenza si verifica subito perché hanno coordinate rispettivamente $[1 \ 3 \ 0 \ 0]^T, [1 \ 1 \ 2 \ 0]^T, [0 \ 2 \ 1 \ 1]^T$ rispetto alla base "canonica" di $\mathbb{R}_3[x]$.

05. 1: $\lambda_1\varphi(X_1) + \lambda_2\varphi(X_2) = \underline{(\lambda_1X_1 \cdot B + \lambda_2X_2 \cdot B)}$

$$2: \varphi(\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2) = \underline{(\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2) \cdot B}$$

e le due matrici sottolineate notoriamente coincidono. Per calcolare $\text{ker } \varphi$ si pone

$$\varphi \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ cioè } \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ da cui: } \begin{cases} x = 2y \\ z = 2t \end{cases} \text{ . Il sistema ha } \infty^2$$

soluzioni, quindi $\text{ker } \varphi$ ha dimensione 2 e una sua base è per esempio $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Quindi $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$. Una base per $\text{Im } \varphi$ è per esempio $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (sono rispettivamente $\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sono due e linearmente indipendenti).

06. La verifica della linearità è analoga a quella dello 05.

Per quanto riguarda il nucleo, evidentemente $X \in \text{ker } \varphi$ se $X \cdot B = B \cdot X$, se cioè X commuta con B . Per esempio I e B stessa commutano con B , quindi appartengono a $\text{ker } \varphi$. Dato che sono linearmente indipendenti, allora $\text{ker } \varphi$ ha almeno dimensione 2. D'altra parte si ha $\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Questi vettori sono linearmente indipendenti e appartengono a $\text{Im } \varphi$ che ha perciò ugualmente dimensione almeno 2. In conclusione $\dim(\text{ker } \varphi) = \dim(\text{Im } \varphi) = 2$ e ne abbiamo già trovato due basi.

07. La verifica della linearità è analoga a quella dello 01. h. Il nucleo è costituito dai vettori (a, b, c) tali che $a \cdot \sin(x) + b \cdot \sin(x - 2) + c \cdot \sin(x - 3) = 0$ (uguaglianza di funzioni), cioè (usando note formule trigonometriche) $(a + b \cdot \cos(2) + c \cdot \cos(3)) \cdot \sin(x) - (b \cdot \sin(2) + c \cdot \sin(3)) \cdot \cos(x) = 0$ da cui (per la nota lineare indipendenza di $\sin(x)$ e $\cos(x)$): $\begin{cases} a + b \cdot \cos(2) + c \cdot \cos(3) = 0 \\ b \cdot \sin(2) + c \cdot \sin(3) = 0 \end{cases}$.

Risolvendo il sistema lineare omogeneo ridotto in a, b, c si vede che ha le ∞^1 soluzioni

$$\left(\frac{\sin(3) \cos(2) - \sin(2) \cos(3)}{\sin(2)} c, -\frac{\sin(3)}{\sin(2)} c, c \right).$$

Quindi $\text{ker } \varphi$ ha dimensione 1 e, usando note formule trigonometriche, si trova come suo generatore (e quindi come base per $\text{ker } \varphi$) per esempio il vettore $(\sin(1), -\sin(3), \sin(2))$.

[Applicazioni lineari **Risposte**] 3.9

11. La matrice A_φ^{KK} è ovvia (sono semplicemente i coefficienti delle equazioni che definiscono φ):
Per quanto riguarda $A_\varphi^{\mathcal{B}\mathcal{D}}$ basta calcolare:

- $\varphi(1, 1, 0) = (1, 2, 0, 1)$ che ha evidentemente coordinate $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ risp. a \mathcal{D} (è il primo vettore). La prima colonna è $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.
- $\varphi(0, 1, 0) = (0, 2, -1, 1)$ che ha coordinate $[a \ b \ c \ d]^T$ rispetto a \mathcal{D} . Quindi $(0, 2, -1, 1) = a(1, 2, 0, 1) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, -1, 1) + d(0, 0, 1, 0)$, da cui il sistema lineare $\{0 = a; 2 = 2a + b; -1 = -c + d; 1 = a + c\}$ e, immediatamente $\{a = 0; b = 2; c = 1; d = 0\}$. La seconda colonna è $[0 \ 2 \ 1 \ 0]^T$.
- $\varphi(0, 1, 1) = (1, 4, -1, 2)$ che ha coordinate $[a \ b \ c \ d]^T$ rispetto a \mathcal{D} . Quindi $(1, 4, -1, 2) = a(1, 2, 0, 1) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, -1, 1) + d(0, 0, 1, 0)$, da cui il sistema lineare $\{1 = a; 4 = 2a + b; -1 = -c + d; 2 = a + c\}$ e, immediatamente $\{a = 1; b = 2; c = 1; d = 0\}$. La seconda colonna è $[1 \ 2 \ 1 \ 0]^T$.

$$A_\varphi^{KK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_\varphi^{\mathcal{B}\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Esprimiamo $(0, 1, 3)$ come combinazione lineare dei vettori di \mathcal{B} . Come si calcola subito, si ha:
 $(0, 1, 3) = 0 \cdot (1, 1, 0) + (-2)(0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 1, 1)$. Pertanto:

$$\varphi(0, 1, 3) = 0 \cdot \varphi(1, 1, 0) + (-2)\varphi(0, 1, 0) + 3 \cdot \varphi(0, 1, 1).$$

Occorre quindi conoscere $\varphi(1, 1, 0), \varphi(0, 1, 0), \varphi(0, 1, 1)$:

- $\varphi(1, 1, 0)$ è il vettore che ha coordinate $[1 \ 3]^T$ (1^a colonna della matrice) rispetto a \mathcal{D} , cioè $1 \cdot (2, 0) + 3 \cdot (1, 1) = (5, 3)$
- $\varphi(0, 1, 0)$ è il vettore che ha coordinate $[0 \ -1]^T$ (2^a colonna della matrice) rispetto a \mathcal{D} , cioè $0 \cdot (2, 0) + (-1) \cdot (1, 1) = (-1, -1)$
- $\varphi(0, 1, 1)$ è il vettore che ha coordinate $[2 \ 0]^T$ (3^a colonna della matrice) rispetto a \mathcal{D} , cioè $2 \cdot (2, 0) + 0 \cdot (1, 1) = (4, 0)$.

In conclusione: $\varphi(0, 1, 3) = 0 \cdot (5, 3) + (-2)(-1, -1) + 3 \cdot (4, 0) = (14, 2)$.

Per calcolare $\varphi^{-1}(2, 1)$ occorre risolvere l'equazione $\varphi(v) = (2, 1)$. Dato che $(2, 1)$ ha coordinate $[1/2 \ 1]$ rispetto a \mathcal{D} , se v ha coordinate $[x \ y \ z]^T$ rispetto a \mathcal{B} si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Risolvendo : } \begin{cases} x = 1/2 - 2z \\ y = 1/2 - 6z \end{cases}.$$

In conclusione v ha coordinate $[x \ y \ z]^T = [1/2 - 2z \quad 1/2 - 6z \quad z]^T$ rispetto a \mathcal{B} , cioè:
 $v = (1/2 - 2z) \cdot (1, 1, 0) + (1/2 - 6z) \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 1, 1) = (1/2 - 2z, 1 - 7z, z)$. Quindi si ha: $\varphi^{-1}(2, 1) = \{(1/2 - 2z, 1 - 7z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Per calcolare A_φ^K basta osservare che con conti analoghi a quello fatto per $\varphi(0, 1, 3)$ si trova:

$$\varphi(1, 0, 0) = (6, 4); \varphi(0, 1, 0) = (-1, -1); \varphi(0, 0, 1) = (5, 1) \text{ per cui } A_\varphi^{KK} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalla matrice A_φ^{KK} si ricava subito $\ker \varphi$. Una sua base è per esempio $(-2, -7, 1)$.

Dato che $\dim(\ker \varphi) = 1$, allora $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$ quindi $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^2$; una base per $\text{Im } \varphi$ è per esempio quella canonica.

13. I conti sono analoghi a quelli fatti nel 12. Si ricava: $\varphi(1, i, 0) = (1 + 2i, 1)$; $\varphi^{-1}(1, i) = \emptyset$.
Una base per $\ker \varphi$ è per esempio $(1, i, i)$, $(0, 1, 0)$; una per $\text{Im } \varphi$ è per esempio $(1 + 2i, 1)$.

14. Si osservi che l'ultima colonna della matrice è nulla per cui il terzo vettore della base di \mathbb{R}^3 dovrà essere un vettore di $\ker \varphi$, per esempio $(1, 1, -1)$. Completando in qualche modo questo vettore a base per \mathbb{R}^3 , scegliamo come base $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, -1)$.

Dalla matrice si deduce subito che $\varphi(1, 0, 0)$ è il primo vettore della base di \mathbb{R}^4 e che $\varphi(0, 1, 0)$ è il secondo vettore. Quindi la scelta dei primi due vettori della base di \mathbb{R}^4 è obbligata in conseguenza della scelta della base di \mathbb{R}^3 . Dato che $\varphi(1, 0, 0) = (1, 0, 1, 0)$ e $\varphi(0, 1, 0) = (0, 2, -1, 1)$, come base di \mathbb{R}^4 possiamo scegliere esempio: $(1, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$. Infatti gli ultimi due vettori della base di \mathbb{R}^4 non influiscono sulla matrice.

15. Per determinare una base per $\ker(f)$ risolviamo il sistema omogeneo associato ad A :

$$\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 0 \\ + 5y = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 6z = 0 \\ + y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 6z = 0 \\ + y = 0 \end{cases}$$

Ha quindi ∞^1 soluzioni che sono $(-2z, 0, z)$. Una base per $\ker(f)$ è quindi $(-2, 0, 1)$.

Dato che $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 2$, allora come base di $\text{Im}(f)$ si possono prendere due vettori che abbiano le coordinate di due colonne linearmente indipendenti di A , per esempio: $(3, 0, 1)$ e $(2, 5, -1)$.

Calcoliamo ora $A^{\mathcal{B}\mathcal{B}}$. Si ha:

- $f(1, 1, 0) = (5, 5, 0)$ (basta sommare la prima colonna di A con la seconda colonna) e questo vettore ha evidentemente coordinate $[5 \ 0 \ 0]^T$ rispetto a \mathcal{B} , dato che è 5 volte il primo vettore di \mathcal{B} .
- $f(1, 0, 1) = (9, 0, 3)$ (basta sommare la prima colonna di A con la terza colonna) e questo vettore ha coordinate $[a \ b \ c]^T$ rispetto a \mathcal{B} , con $a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(0, 0, 1) = (9, 0, 3)$, da cui il sistema $\{a + b = 9; a = 0, b + c = 3\}$, che ha soluzione $[0 \ 9 \ -6]$. Queste sono le coordinate.
- $f(0, 0, 1) = (6, 0, 2)$ che ha coordinate $[a \ b \ c]^T$ rispetto a \mathcal{B} , con $a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(0, 0, 1) = (6, 0, 2)$, da cui il sistema lineare $\{a + b = 6; a = 0, b + c = 2\}$, che ha soluzione $[0 \ 6 \ -4]$. Queste sono le coordinate.

$$A_f^{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Da questi dati si scrive subito la matrice.

16. a. Perché $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 2)$ è una base di \mathbb{R}^4 .

- b. $f(1, 0, 0, 1) = (2, 0, 0, 2)$ che ha coordinate $[2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ rispetto a \mathcal{B}
 $f(0, 1, 1, 0) = (1, 1, 1, 1)$ che ha coordinate $[1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ (è il primo vettore più il secondo).
 $f(1, 2, 0, 0) = (0, 0, 0, 2)$ che ha coordinate $[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ (è il quarto vettore).
 $f(0, 0, 0, 2) = (0, 1, 1, 4)$ che ha coordinate $[0 \ 1 \ 0 \ 2]^T$ (è il secondo vettore più due volte il quarto).

Di qui la matrice che è: $A_f^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- c. La matrice $A^{\mathcal{B}}$ si riduce scambiando R_3 con R_4 ed ha evidentemente caratteristica 3, per cui $\dim(\text{Im}(f)) = 3$ e $\dim(\ker(f)) = 1$. Si ricavano immediatamente dalla definizione di f tre vettori linearmente indipendenti di $\text{Im}(f)$ che sono per esempio $(2, 0, 0, 2), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 2)$. Quindi questa è una base per $\text{Im}(f)$.

Per quanto riguarda $\ker(f)$ risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ y + t = 0 \\ z + 2t = 0 \end{cases} \quad \text{Le } \infty^1 \text{ soluzioni sono: } (t/2, -t, -2t, t) \text{ al variare di } t \in \mathbb{R} \text{ e forniscono}$$

le coordinate rispetto a \mathcal{B} dei vettori del nucleo. Quindi una base per $\ker(f)$ è per esempio data dal vettore di coordinate $[1/2, -1, -2, 1]^T$ che è :

$$1/2(1, 0, 0, 1) - (0, 1, 1, 0) - 2(1, 2, 0, 0) + (0, 0, 0, 2) = (-3/2, -5, -1, 5/2)$$

- d. Per questo occorre conoscere $A_f^{\mathcal{B}\mathcal{B}}$. Calcoliamo subito:

- $f(0, 0, 0, 1) = (0, 1/2, 1/2, 2)$ (dalla quarta uguaglianza che definisce f).
- $f(1, 0, 0, 0) = f(1, 0, 0, 1) - f(0, 0, 0, 1) = (2, 0, 0, 2) - (0, 1/2, 1/2, 2) = (2, -1/2, -1/2, 0)$
- $f(0, 1, 0, 0) = f(1/2, 1, 0, 0) - f(1/2, 0, 0, 0)$ queste due immagini le abbiamo già:
 $f(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 1) - (1, -1/4, -1/4, 0) = (-1, 1/4, 1/4, 1)$
- $f(0, 0, 1, 0) = f(0, 1, 1, 0) - f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 1, 1) - (-1, 1/4, 1/4, 1) = (2, 3/4, 3/4, 0)$.

Quindi $A_f^{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ -1/2 & 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Immediatamente si ha:

$$f(x, y, z, t) = (2x - y + 2z, -1/2x + 1/4y + 3/4z + 1/2t, -1/2x + 1/4y + 3/4z + 1/2t, y + 2t).$$

17. La verifica della linearità di φ è analoga a quella dello 01. g.

Per scrivere $A_{\varphi}^{\mathcal{B}}$ basta calcolare

$\varphi(1) = 0$; $\varphi(x) = 1$; $\varphi(x^2) = 0$; $\varphi(x^3) = -3x^2$ e la matrice è immediata.

$$A_{\varphi}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base per $\ker \varphi$ si ricava risolvendo il sistema omogeneo associato a questa matrice, che ha ovviamente le ∞^2 soluzioni $(x, 0, z, 0)$. Quindi una base è per esempio $1, x^2$.

Per scrivere $A_{\varphi}^{\mathcal{D}}$ occorre calcolare:

- $\varphi(1) = 0$
- $\varphi(x+1) = 1$ (che ha coordinate $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ rispetto a \mathcal{D})
- $\varphi(x+1)^2 = 2$ (che ha coordinate $[2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ rispetto a \mathcal{D})
- $\varphi(x+1)^3 = -3x^2 + 3$ (che ha coordinate $[0 \ 6 \ -3 \ 0]^T$ rispetto a \mathcal{D} dato che $-3x^2 + 3 = 6(x+1) - 3(x+1)^2$).

$$A_{\varphi}^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

18. La verifica della linearità di φ è analoga a quella dello 01. g. Si noti inoltre che qualunque sia $P(x)$, $\varphi(P(x))$ appartiene a W perché ha grado minore di 4 e ha la radice 1. Lo spazio W non ha dimensione 4, perché non coincide con $\mathbb{R}_3[x]$ e ha dimensione 3 perché per esempio i tre vettori $(x-1), x(x-1), x^2(x-1)$ appartengono a W e sono linearmente indipendenti dato che hanno gradi differenti. Quindi questa può essere scelta come base \mathcal{B} .

Per quanto riguarda la matrice:

- $\varphi(x-1) = (x-1)$ che ha coordinate $[1 \ 0 \ 0]^T$ rispetto a \mathcal{B} .
- $\varphi(x(x-1)) = (2x-1)(x-1) = -(x-1) + 2x(x-1)$. Ha quindi coordinate $[-1 \ 2 \ 0]^T$.
- $\varphi(x^2(x-1)) = (3x^2 - 2x)(x-1) = -2x(x-1) + 3x^2(x-1)$. Ha coordinate $[0 \ -2 \ 3]^T$.

La matrice è pertanto: $A_{\varphi}^{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

19. La verifica della linearità di φ è analoga a quella dello 01. h. Per calcolare la matrice basta osservare che:

- $\varphi(\sin(x)) = \sin(x + \pi/3) = \sin(x) \cos(\pi/3) + \cos(x) \sin(\pi/3)$
- $\varphi(\cos(x)) = \cos(x + \pi/3) = -\sin(x) \sin(\pi/3) + \cos(x) \cos(\pi/3)$

La matrice è pertanto $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

20. Si ha: $\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha coordinate $[1 \ -2 \ 0 \ 0]^T$ rispetto alla base canonica. Analogamente si calcolano $\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ etc.

La matrice associata è quindi la matrice a blocchi: $A_{\varphi}^{KK} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

21. I due sistemi lineari a lato non hanno soluzione e per questo motivo le controimmagini dei due vettori sono vuote. Per determinare $\varphi^{-1}(U)$ vanno invece risolte le infinite equazioni in v : $\varphi(v) = a(2, 0, 1, 0) + b(0, 2, 0, 1)$ (infinite al variare di a e b). Ponendo $v = (x, y, z)$ si ottengono i sistemi (1) nelle incognite x, y, z che risultano avere soluzioni se e solo se $a = b$.

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ 2y + 2z = 0 \\ x - y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + 2z = 2 \\ x - y = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni sono sempre ∞^1 e sono espresse dalle (2). Quindi i vettori di $\varphi^{-1}U$ sono $(2a - z, a - z, z) = a(2, 1, 0) + z(-1, -1, 1)$ al variare di a, z e una base per $\varphi^{-1}(U)$ è quindi per esempio $(2, 1, 0), (-1, -1, 1)$.

$$(1) \begin{cases} x + z = 2a \\ 2y + 2z = 2b \\ x - y = a \\ y + z = b \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = 2a - z \\ y = a - z \\ z = z \end{cases}$$

22. La condizione $\ker \varphi \neq \{0\}$ significa che $\ker \varphi$ è un insieme infinito (è un sottospazio). Sia $v \in \varphi^{-1}(w)$ (v esiste dato che $\varphi^{-1}(w) \neq \emptyset$). Allora come si verifica subito, tutti i vettori del tipo $v + v_1$ con $v_1 \in \ker \varphi$ stanno in $\varphi^{-1}(w)$ perché $\varphi(v + v_1) = \varphi(v) + \varphi(v_1) = w + 0 = w$ e sono infiniti.

23. L'applicazione φ è surgettiva perché per ogni terna (a, b, c) esiste sempre un polinomio $P(x)$ tale che $P(1) = a$, $P(2) = b$, $P(3) = c$ (per esempio è facile calcolarne uno di grado due). Il nucleo è costituito da tutti e soli i polinomi del tipo $P(x) = Q(x)(x-1)(x-2)(x-3)$ e non ha dimensione finita dato che contiene polinomi di tutti i gradi da 3 in poi e n polinomi di n gradi differenti sono linearmente indipendenti.

24. Si ha:

$$1: \lambda_1 \varphi(z_1) + \lambda_2 \varphi(z_2) = \underline{\lambda_1 \bar{z}_1} + \underline{\lambda_2 \bar{z}_2}$$

$$2: \varphi(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \overline{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2} = \overline{\lambda_1} \bar{z}_1 + \overline{\lambda_2} \bar{z}_2$$

Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora $\lambda_1 = \overline{\lambda_1}$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_2}$ per cui i due numeri sottolineati coincidono quindi φ è \mathbb{R} -lineare.

Non è \mathbb{C} -lineare perché per esempio: $i \cdot \varphi(i) = i \cdot (-i) = 1$, ma $\varphi(i \cdot i) = \varphi(-1) = -1$.

Calcoliamo la matrice:

$$\begin{array}{l} \varphi(1) = 1 = 1 \cdot (1) + 0 \cdot (1+i) \\ \varphi(1+i) = 1-i = 2 \cdot (1) - 1 \cdot (1+i) \end{array} \quad \text{La matrice associata è quindi } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

30. Per esempio

$$\varphi_1(1, 1, 1) = (0, 0, 0); \quad \varphi_1(0, 1, 0) = (1, 0, 1); \quad \varphi_1(0, 0, 1) = (1, -1, 0)$$

$$\varphi_2(1, 1, 1) = (0, 0, 0); \quad \varphi_2(0, 1, 0) = (1, -1, 0); \quad \varphi_2(0, 0, 1) = (1, 0, 1).$$

Le due trasformazioni lineari sono completamente definite perché $(1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ è una base di \mathbb{R}^3 ed è evidente quali siano il loro nucleo e la loro immagine.

31. Completiamo $(1, 1, 1)$ a base per \mathbb{R}^3 per esempio con $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Cerchiamo due altri vettori di \mathbb{R}^4 linearmente indipendenti con $(1, 2, 0, -1)$ e poniamo quindi per esempio

$$\varphi(1, 1, 1) = (1, 2, 0, -1) \quad \varphi(0, 1, 0) = (0, 0, 1, 1) \quad \varphi(0, 0, 1) = (1, 1, 0, 0).$$

L'applicazione φ è completamente definita perché $(1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ è una base di \mathbb{R}^3 . Evidentemente $\text{Im } \varphi = L\{(1, 2, 0, -1), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)\}$. Quindi $(1, 0, 0, 0)$ non appartiene a $\text{Im } \varphi$ perché come si verifica subito il sistema lineare in x, y, z

$(1, 0, 0, 0) = x(1, 2, 0, -1) + y(0, 0, 1, 1) + z(1, 1, 0, 0)$ non ha soluzioni. Analogamente nessuno degli altri tre vettori della base canonica di \mathbb{R}^4 sta in $\text{Im } \varphi$.

La scelta dei due vettori di \mathbb{R}^4 è stata fatta in modo casuale. Se per caso un qualche vettore della base canonica di \mathbb{R}^4 appartenesse a $\text{Im } \varphi$, occorrerebbe modificare questa scelta.

Dato poi che $\text{Im } \varphi$ ha dimensione 3, allora $\dim(\ker \varphi) = 0$ per cui l'applicazione è iniettiva.

32. Completiamo $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 2, 2)$ base di \mathbb{R}^4 per esempio con $(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ e poniamo quindi:

$$\varphi(1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \quad \varphi(0, 1, 2, 2) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\varphi(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 0, 1) \quad \varphi(0, 0, 0, 1) = (0, 1, 2, 2)$$

L'applicazione è completamente definita e nucleo e immagine sono evidentemente V , come si verifica immediatamente.

33. a. No, perché $\dim(\text{Im } \varphi) + \dim(\ker \varphi) = \dim(\mathbb{R}^3)$.

b. Sì, per esempio l'applicazione identicamente nulla.

34. Una base per $\text{Im } \varphi$ è per esempio $(x-1)^2, (x-1)^3$. Quindi si può per esempio porre:

$$\varphi(1) = 0; \quad \varphi(x) = 0; \quad \varphi(x^2) = 0; \quad \varphi(x^3) = (x-1)^2; \quad \varphi(x-1)^4 = (x-1)^3.$$

φ è completamente definita perché $1, x, x^2, x^3, (x-1)^4$ è base per $\mathbb{R}_4[x]$.

35. Una base per $\ker \varphi$ è per esempio $(x-1), (x-1)x, (x-1)x^2$. Si può definire φ così:

$$\varphi(x-1) = 0 \quad \varphi((x-1)x) = 0 \quad \varphi((x-1)x^2) = 0 \quad \varphi((x+1)^2) = I$$

Dato che $(x+1)^2$ completa la base di $\ker \varphi$ a base di $\mathbb{R}_3[x]$, l'applicazione è completamente definita e verifica le condizioni richieste, come si verifica immediatamente.

36. Perché $(1, 2, 2) = (1, 0, 1) + (0, 1, 0) + (0, 1, 1)$, ma $(4, 5, 6) \neq (3, 0, 1) + (0, 0, 1) + (0, 1, 0)$.

37. Esprimiamo $(2, a)$ come combinazione lineare dei due vettori $(1, 1), (0, 1)$ che costituiscono base per \mathbb{R}^2 . Si ha: $(2, a) = 2(1, 1) + (a - 2)(0, 1)$.

Quindi $\varphi(2, a) = 2\varphi(1, 1) + (a - 2)\varphi(0, 1) = 2(3, 1, 1) + (a - 2)(0, 1, 1) = (6, a, a)$

Il vettore $(6, a, a)$ appartiene a $L\{(1, -1, 0), (2, 1, -1)\}$ per $a = -3/2$, dato che il sistema lineare

$$\text{in } x, y \begin{cases} 6 &= x + 2y \\ y &= -x + y \\ z &= -y \end{cases} \text{ ha soluzioni solo per } a = -3/2.$$

38. Non è possibile soddisfare tutte le condizioni richieste perché, se $\varphi(1, 0, 1) = (0, 1, 1)$, allora $\varphi(2, 0, 2) = (0, 2, 2)$, quindi la condizione è incompatibile.

39. Da $\varphi(1, 2, 0) = \varphi(0, 0, -1)$ si ha: $\varphi((1, 2, 0) - (0, 0, -1)) = (0, 0, 0)$. Quindi si ha $(1, 2, 1) \in \ker \varphi$. Se quindi poniamo $\ker \varphi = L\{(1, 2, 1)\}$ e $\text{Im } \varphi = L\{(1, 2, 1), (0, 0, 1)\}$ si hanno tutte le condizioni richieste e l'applicazione può essere per esempio così definita:

$$\varphi(1, 2, 1) = (0, 0, 0) \quad \varphi(0, 1, 0) = (1, 2, 1) \quad \varphi(0, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

40. Perché, nonostante i tre vettori $(1, 1, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$ siano linearmente dipendenti, la loro relazione di lineare dipendenza (essenzialmente unica, ameno di fattore di proporzionalità) che è: $(1, 1, 2) - (0, 1, 1) - (1, 0, 1) = (0, 0, 0)$ è compatibile con φ dato che, applicando φ si ottiene: $\varphi(1, 1, 2) - \varphi(0, 1, 1) - \varphi(1, 0, 1) = \varphi(0, 0, 0)$ come si verifica subito.

Non è unica perché le tre condizioni si riducono a due sole.

Quindi un'applicazione lineare che soddisfi l'ultima condizione può essere per esempio:

$$\varphi(1, 1, 2) = (2, 2, 1) \quad \varphi(0, 1, 1) = (0, 1, 1) \quad \varphi(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

41. • $\varphi \circ \psi(x, y, z) = \varphi(x + z, z - x, x) = (2z, z - x, z - x)$. Una base per $\ker(\varphi \circ \psi)$ è per esempio $(0, 1, 0)$, una per $\text{Im}(\varphi \circ \psi)$ è per esempio $(0, 1, 1), (2, 1, 1)$.

• $\psi \circ \varphi(x, y, z) = \psi(x + y, y, y) = (x + 2y, -x, x + y)$. Una base per $\ker(\psi \circ \varphi)$ è per esempio $(0, 0, 1)$, una per $\text{Im}(\psi \circ \varphi)$ è per esempio $(1, -1, 1), (2, 0, 1)$.

• $\varphi^2(x, y, z) = \varphi(x + y, y, y) = (x + 2y, y, y)$. Una base per $\ker(\varphi^2)$ è per esempio $(0, 0, 1)$, una per $\text{Im}(\varphi^2)$ è per esempio $(1, 0, 0), (2, 1, 1)$.

• $\psi^2(x, y, z) = \psi(x + z, z - x, x) = (2x + z, -z, x + z)$. Una base per $\ker(\psi^2)$ è per esempio $(0, 1, 0)$, una per $\text{Im}(\psi^2)$ è per esempio $(2, 0, 1), (1, -1, 1)$

I conti precedenti si possono anche effettuare mediante le due matrici A e B , associate rispettivamente a φ e ψ tramite la base canonica.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $A \cdot B$ è associata a $\varphi \circ \psi$, $B \cdot A$ è associata a $\psi \circ \varphi$, A^2 è associata a φ^2 etc.

42. a. Si ha immediatamente:

$$\varphi(1, 1, 1) = (1, -1, 0)$$

$$\varphi^2(1, 1, 1) = \varphi(\varphi(1, 1, 1)) = \varphi(1, 0, 1) = (3, -1, 1)$$

$$\varphi^3(1, 1, 1) = \varphi(\varphi(1, 0, 1)) = \varphi(3, -1, 1) = (7, -3, 2)$$

Per trovare $\varphi^{-1}(1, 1, 1)$ occorre risolvere il sistema lineare $\{2x - y = 1, y - 2z = 1, x - z = 1\}$ che ha le infinite soluzioni $\{(1 + z, 1 + 2z, z)\}$.

b. Si calcola come nell'esercizio precedente che: $\varphi^2(x, y, z) = (4x - 3y + 2z, -2x + y, x - y + z)$. Con $\varphi^2 - 1$ si intende la differenza tra l'applicazione φ^2 e l'applicazione identica di \mathbb{R}^3 in sé: $(\varphi^2 - 1)(x, y, z) = (4x - 3y + 2z, -2x + y, x - y + z) - (x, y, z) = (3x - 3y + 2z, -2x, x - y)$. Dato che la matrice associata a $\varphi^2 - 1$ è invertibile, allora $\varphi^2 - 1$ è bigettiva.

43. a. Come si verifica subito, $\text{Im } \varphi$ ha dimensione 2. Lo spazio $\text{Im}(\psi \circ \varphi)$ non può avere dimensione maggiore, per cui $\text{Im}(\psi \circ \varphi) \neq \mathbb{R}^3$. Il problema non ha quindi soluzione perché 1 (che in questo caso è l'applicazione identica di \mathbb{R}^3) ha come immagine tutto \mathbb{R}^3 .

b. In questo caso, con 1 si intende l'applicazione identica di \mathbb{R}^2 . Dato che $\varphi(1, 0, 0) = (1, 0)$ e $\varphi(0, 0, -1) = (0, 1)$, allora si può definire ψ per esempio in questo modo:

$$\psi(1, 0) = (1, 0, 0) \quad \psi(0, 1) = (0, 0, -1).$$

Chiaramente ψ soddisfa la condizione data.

44. Come si verifica: $\varphi^3(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ per cui $\varphi^3 = -\varphi$ e quindi ovviamente il più piccolo n è 6. Dato che $\varphi^6 = 1$, allora $\varphi^5 \circ \varphi^1 = 1$. Quindi φ^5 e φ sono una l'inversa dell'altra e si ha: $\varphi^{-1} = \varphi^5$.

45. a. È chiaro che $\varphi^n(f(x)) = f(x + n\pi/3)$. Il più piccolo n è quindi 6 dato che le funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono periodiche di periodo 2π e $\frac{n\pi}{3}$ è per la prima volta trigonometricamente equivalente a 2π per $n = 6$. D'altra parte la matrice associata rispetto alla base di V costituita da $\sin(x)$ e $\cos(x)$ è $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ e si vede che $A^6 = I$.
- b. Come sopra, è chiaro che $\varphi^n(f(x)) = f(x + n\alpha)$. Quindi si avrà $\varphi^n(f(x)) = f(x)$ quando $n\alpha = 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$ cioè quando $\frac{n}{k} = \frac{2\pi}{\alpha}$. Occorre quindi che $\frac{2\pi}{\alpha}$ sia un numero razionale cioè $2\pi/\alpha \in \mathbb{Q}$ o anche semplicemente $\pi/\alpha \in \mathbb{Q}$. Per esempio, ciò si ottiene con $\alpha = 3\pi/4$ o $\alpha = -11\pi/17$ etc. Altrimenti φ^n non è mai l'applicazione identica.
46. Per 0 si intende l'applicazione lineare nulla il cui nucleo è tutto \mathbb{R}^3 .
Come si vede subito, si ha:
 $\varphi^2(x, y, z) = \varphi(y, y+z, -y-z) = (y+z, 0, 0)$
 $\varphi^3(x, y, z) = \varphi(y+z, 0, 0) = (0, 0, 0)$
Questo per ogni (x, y, z) , quindi il più piccolo n è 3.
47. a. Se $v \in \ker \varphi$ allora $\varphi(v) = 0$ quindi $(\psi \circ \varphi)(v) = \psi(\varphi(v)) = \psi(0) = \underline{0}$ perciò $v \in \ker(\psi \circ \varphi)$
b. Se $w \in \text{Im}(\psi \circ \varphi)$ allora w è immagine attraverso $\psi \circ \varphi$ di un $v \in V$, cioè $w = (\psi \circ \varphi)(v)$ e $w = \psi(\varphi(v))$. Perciò $w \in \text{Im} \psi$, in quanto immagine attraverso ψ di $\varphi(v)$.
c. Se $w \in \text{Im} \varphi$ allora w è immagine attraverso φ di un $v \in V$, cioè $w = \varphi(v)$ e $\underline{\psi(w)} = \psi(\varphi(v)) = (\psi \circ \varphi)(v) = \underline{0}$ perciò $w \in \ker \psi$.
Anche il viceversa è vero: supponiamo $\text{Im} \varphi \subset \ker \psi$ e sia $v \in V$. Allora ovviamente $\varphi(v) \in \text{Im} \varphi$, ma $\text{Im} \varphi \subset \ker \psi$ quindi $\varphi(v) \in \ker \psi$, il che significa $\psi(\varphi(v)) = 0$, ovvero $(\psi \circ \varphi)(v) = 0$. Ma questo avviene qualunque sia v , quindi $\psi \circ \varphi$ è l'applicazione nulla, cioè $\psi \circ \varphi = 0$.
d. Se $v \in \ker(\psi \circ \varphi)$, allora $(\psi \circ \varphi)(v) = 0$, cioè $\psi(\varphi(v)) = 0$, ma ψ è iniettiva per cui $\varphi(v) = 0$, ma φ è iniettiva per cui $v = 0$. In conclusione $\ker(\psi \circ \varphi) = \{0\}$.
e. Se infatti $u \in U$, allora per la surgettività di ψ si ha che $u = \psi(w)$ per un $w \in W$; per la surgettività di φ si ha che $w = \varphi(v)$, per un $v \in V$, da cui $u = \psi(\varphi(v)) = (\psi \circ \varphi)(v)$, quindi $u \in \text{Im}(\psi \circ \varphi)$.
48. Basta per esempio scegliere α in modo che $\text{Im} \alpha = \ker \varphi$ e ψ in modo che $\text{Im} \varphi = \ker \psi$. L'applicazione α non è l'applicazione nulla dato che $\ker \varphi$ non è $\{0\}$ e quindi $\text{Im} \alpha \neq \{0\}$. L'applicazione ψ non è l'applicazione nulla dato che $\text{Im} \varphi$ non è \mathbb{C}^3 e quindi $\ker \psi \neq \mathbb{C}^3$.
49. Lo spazio delle applicazioni lineari di \mathbb{R}^3 in sé è in corrispondenza biunivoca con lo spazio delle matrici reali 3×3 che ha dimensione 9. La matrice associata a una delle φ in questione rispetto alla base $\mathcal{B} : \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & c & c \end{pmatrix}$ $(1, 2, 3), (2, 0, 2), (1, 1, 1)$ è certamente quella a lato e tali matrici generano chiaramente uno spazio di dimensione 3 in $M_{33}(\mathbb{R})$.
50. L'applicazione φ è invertibile perché la matrice associata a φ è invertibile. Per trovare $\varphi^{-1}(x, y, z)$, poniamo $\varphi^{-1}(x, y, z) = (a, b, c)$. Allora $\varphi(a, b, c) = (x, y, z)$ cioè: $(a+b, b+c, a) = (x, y, z)$. Da qui il sistema lineare in (a, b, c) : $\{a+b = x; b+c = y; a = z\}$ che ha le soluzioni $\{a = z; b = x-z; c = -x+y+z\}$.
In conclusione: $\varphi^{-1}(x, y, z) = (z, x-z, -x+y+z)$.
51. Chiamando per semplicità v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 la base canonica di \mathbb{C}^5 , si può porre per esempio $\ker \varphi = L\{v_1, v_2\}$, $\text{Im} \varphi = L\{v_1, v_2, v_3\}$. L'aver fatto in modo che i vettori v_1 e v_2 siano comuni a $\ker \varphi$ e $\text{Im} \varphi$ fa sì che $\ker \varphi^2$ contenga anche i vettori le cui immagini sono v_1 e v_2 . L'applicazione lineare può essere quindi così definita:
 $\varphi(v_1) = 0 \quad \varphi(v_2) = 0 \quad \varphi(v_3) = v_1 \quad \varphi(v_4) = v_2 \quad \varphi(v_5) = v_3$
Il nucleo e l'immagine sono chiaramente quelli scelti. Inoltre:
 $\varphi^2(v_1) = 0 \quad \varphi^2(v_2) = 0 \quad \varphi^2(v_3) = \varphi(v_1) = 0 \quad \varphi^2(v_4) = \varphi(v_2) = 0 \quad \varphi^2(v_5) = \varphi(v_3) = v_1$
Quindi $\ker \varphi^2$ è $L\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e ha dimensione 4 come si voleva.
52. Come si verifica subito, l'immagine di φ ha dimensione 3. Calcoliamo:
 $\varphi(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 2, 0) \quad \varphi(0, 1, 0, 0) = (1, -1, 0, 0) \quad \varphi(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1)$.

I tre vettori di $\text{Im } \varphi$ sono linearmente indipendenti, quindi:

$\text{Im } \varphi = L\{(1, 1, 2, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Ponendo per esempio

$\psi_1(1, 1, 2, 0) = (1, 0, 0, 0)$; $\psi_1(1, -1, 0, 0) = (0, 1, 0, 0)$; $\psi_1(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 0)$ si ha un'applicazione ψ_1 che è completamente definita su $\text{Im } \varphi$ e ovviamente $\varphi \circ \psi_1 = 1$. Per avere ψ definita su tutto \mathbb{R}^4 , basta completare i vettori linearmente indipendenti su cui è definita ψ a base di \mathbb{R}^4 e porre per esempio $\psi(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$.

Negli esercizi 53, 54, 55, 56, che seguono conviene interpretare A e B come applicazioni lineari α, β di \mathbb{R}^4 in sé, associandole tramite la base canonica. Si tenga inoltre presente che negli esercizi 54, 55, 56 la matrice A ha caratteristica 2 e che, come si calcola subito, $\text{Im } \alpha = L\{(1, 1, 0, 2), (0, 1, -1, 1)\}$ e $\text{ker } \alpha = L\{-1, -1, 0, 1), (-2, 2, 1, 0)\}$.

53. • Se $\varrho(B) = 4$, allora $\varrho(A \cdot B) = 3$ sempre (B è invertibile).
 • Se $\varrho(B) = 3$, allora, usando la formula $\varrho(A \cdot B) \geq \varrho(A) + \varrho(B) - n$, otteniamo che $\varrho(A \cdot B) = 2$ oppure $\varrho(A \cdot B) = 3$.
 Affinché sia proprio 3 occorre che nessun elemento dell'immagine di β vada in 0 attraverso α , cioè che $\text{Im } \beta \cap \text{ker } \alpha = \{0\}$. Matricialmente occorre che lo spazio delle colonne di B non intersechi lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato ad A .
 • Se $\varrho(B) = 2$, allora $\varrho(A \cdot B) \leq 2$, quindi $\varrho(A \cdot B)$ non è mai 3.

54. Se $A \cdot B = 0$, allora ciò significa che $\text{Im } \beta \subset \text{ker } \alpha$, in particolare $\dim(\text{Im } \beta) \geq 2$.
 $\varrho(B \cdot A)$ massima significa $\text{Im } \alpha \cap \text{ker } \beta = \{0\}$, in particolare $\dim(\text{ker } \beta) \leq 2$. In conclusione $\dim(\text{Im } \beta) = \dim(\text{ker } \beta) = 2$ da cui $\underline{\text{Im } \beta = \text{ker } \alpha}$.

Per esempio si può porre:

$$\begin{aligned} \beta(1, 0, 0, 0) &= (0, 0, 0, 0) & \beta(0, 1, 0, 0) &= (0, 0, 0, 0) \\ \beta(0, 0, 1, 0) &= (-1, -1, 0, 1) & \beta(0, 0, 0, 1) &= (-2, 2, 1, 0) \end{aligned} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservare che $L\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\} \cap \text{Im } \alpha = \{0\}$.

La matrice B è quella associata a β rispetto alla base canonica.

55. Se $B \cdot A = 0$, ciò significa che $\text{Im } \alpha \subset \text{ker } \beta$, in particolare $\dim(\text{ker } \beta) \geq 2$.
 $\varrho(A \cdot B)$ massima significa $\text{Im } \beta \cap \text{ker } \alpha = \{0\}$, in particolare $\dim(\text{Im } \beta) \geq 2$. In conclusione $\dim(\text{Im } \beta) = \dim(\text{ker } \beta) = 2$ e $\underline{\text{ker } \beta = \text{Im } \alpha}$.

Per esempio si può porre:

$$\begin{aligned} \beta(1, 1, 0, 2) &= (0, 0, 0, 0) & \beta(0, 1, -1, 1) &= (0, 0, 0, 0) \\ \beta(0, 0, 1, 0) &= (0, 0, 1, 0) & \beta(0, 0, 0, 1) &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservare che $L\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \cap \text{ker } \alpha = \{0\}$.

La matrice B è quella associata a β rispetto alla base canonica.

56. Come sopra, $A \cdot B = 0$ significa che $\text{Im } \beta \subset \text{ker } \alpha$ e $B \cdot A = 0$ significa che $\text{Im } \alpha \subset \text{ker } \beta$.
 $\varrho(B)$ massima significa $\dim(\text{Im } \beta) = 2$, cioè $\underline{\text{ker } \alpha = \text{Im } \beta}$ e $\underline{\text{Im } \alpha = \text{ker } \beta}$.

Per esempio si può porre:

$$\begin{aligned} \beta(1, 1, 0, 2) &= (0, 0, 0, 0) & \beta(0, 1, -1, 1) &= (0, 0, 0, 0) \\ \beta(0, 0, 1, 0) &= (-1, -1, 0, 1) & \beta(0, 0, 0, 1) &= (-2, 2, 1, 0). \end{aligned} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice B è la matrice associata a β rispetto alla base canonica.

57. Si possono interpretare A e B come applicazioni lineari α, β di \mathbb{R}^4 in sé, rispetto alla base canonica.

Dato che $\text{Im } \alpha = L\{(0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ e bisogna che $\dim(\text{Im } (\beta \circ \alpha)) = 3$, allora i tre vettori che generano $\text{Im } \alpha$ devono essere trasformati da β in tre vettori linearmente indipendenti. Dato che inoltre $\dim(\text{Im } (\alpha \circ \beta)) = 2$, allora $\text{Im } \beta$ (che ha dimensione almeno 3) deve contenere almeno un vettore non nullo di $\text{ker } \alpha$ per esempio $(0, 1, -1, 1)$.

Per esempio si può porre:

$$\begin{aligned} \beta(0, 1, 1, 1) &= (0, 1, 1, 1) & \beta(0, 0, 1, 1) &= (0, 0, 1, 1) \\ \beta(0, 0, 0, 1) &= (0, 1, -1, 1). \end{aligned} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora β soddisfa le condizioni richieste. Per completare la definizione di β si può per esempio porre $\beta(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$.

La matrice B è quella associata a β rispetto alla base canonica.