Applicazioni lineari

Notazione: scriveremo $\varphi(x_1,..,x_n)$ in luogo di $\varphi((x_1,...,x_n))$

FONDAMENTI

F 01. Dire quali delle seguenti applicazioni tra $\mathbb{R}$-spazi vettoriali sono lineari

a. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(x,y) = (x\ ,\ y\ ,\ \pi y)$
b. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(x,y,z) = (x\ ,\ y+1\ ,\ \pi z - y)$
c. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ $\quad \varphi(x,y,z) = (0,0,0,0,0,0)$
d. $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(P(x)) = (P(1)\ ,\ P(2)\ ,\ P(-1))$
e. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(v) = (v \cdot (1,2,0)\ ,\ v \cdot (2,0,-1))$
f. $\varphi : M_{33}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(A) = (\det(A)\ ,\ 0)$
g. $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ $\quad \varphi(f(x)) = xf'(x) - f''(x)$
h. $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ $\quad \varphi(f(x)) = f(x+1)$
i. $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[x]$ $\quad \varphi(f(x)) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2$

F 02. Determinare una base per il nucleo e una per l'immagine dell'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ così definita: $\varphi(x,y,z) = (x+y-z\ ,\ 2x-y\ ,\ 3x-z\ ,\ 3y-2z)$.

F 03. a. Dire perché esiste un'unica applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le due condizioni $\varphi(1,2) = (0,2,2) \qquad \varphi(1,1) = (2,1,0)$.
b. Per questa φ calcolare $\varphi(1,0)$ e $\varphi(0,1)$ e determinare una base per $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

C 04. Poniamo $\mathbb{R}_3[x] = \{P(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg(P(x)) \leq 3\}$. Sia poi $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ così definita: $\varphi(P(x)) = (3x+1)P(x) + (1-x^2)P'(x)$. Provare che φ è effettivamente un'applicazione lineare di $\mathbb{R}_3[x]$ in sé e determinare una base per $\ker\varphi$ e una per $\mathrm{Im}\,\varphi$.

C 05. Sia $\varphi : M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ l'applicazione definita come $\varphi(X) = X \cdot B$, dove B è la matrice a lato. Provare che è lineare e scrivere una base per $\ker\varphi$ e una per $\mathrm{Im}\,\varphi$. $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

C 06. Sia φ l'applicazione lineare di $M_{22}(\mathbb{R})$ in sé definita come $\varphi(X) = X \cdot B - B \cdot X$ dove B è la matrice dello 05. Provare che è lineare e scrivere una base per $\ker\varphi$ e una per $\mathrm{Im}\,\varphi$.

A 07. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to C^\infty(\mathbb{R})$ l'applicazione definita come $\varphi(a,b,c) = a{\cdot}\sin(x) + b{\cdot}\sin(x-2) + c{\cdot}\sin(x-3)$. Provare che è un'applicazione lineare e determinarne il nucleo.

APPLICAZIONI LINEARI E MATRICI ASSOCIATE

F 11. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\varphi(x,y,z) = (x+z\ ,\ 2y+2z\ ,\ x-y\ ,\ y+z)$. Scrivere la matrici $A_\varphi^{\mathcal{K}\mathcal{K}}$, dove con $\mathcal{K}$ si indica la base canonica sia di $\mathbb{R}^3$ che di $\mathbb{R}^4$. Scrivere poi $A_\varphi^{\mathcal{B}\mathcal{D}}$,dove: $\mathcal{B} : (1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)$ e $\mathcal{D} : (1,2,0,1),(0,1,0,0),(0,0,-1,1),(0,0,1,0)$.

F 12. Siano $\mathcal{B} : (1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)$ base di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{D} : (2,0),(1,1)$ base di $\mathbb{R}^2$. Sia poi $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ associata mediante $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{D}$ ad A. Determinare $\varphi(0,1,3)$; $\varphi^{-1}(2,1)$; $A_\varphi^{\mathcal{K}}$; una base per $\ker\varphi$ e una per $\mathrm{Im}\,\varphi$. $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

C 13. Sia $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ tale che: se $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ sono le basi come quelle del 12. $A_\varphi^{\mathcal{B}\mathcal{D}}$ sia a matrice a lato. Determinare $\varphi(1,i,0)$, $\varphi^{-1}(1,i)$, una base per $\ker\varphi$ e una per $\mathrm{Im}\,\varphi$. $\quad A_\varphi^{\mathcal{B}\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$

A 14. Sia φ come in 11. Determinare due basi rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ tali che la matrice associata a φ mediante tali basi sia A. $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

F 15. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice A tramite la base canonica: $A = A_f^{\mathcal{K}\mathcal{K}}$. Determinare una base per $\ker(f)$ e una per $\mathrm{Im}\,(f)$ e calcolare $A_f^{\mathcal{B}\mathcal{B}}$, dove $\mathcal{B} : (1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

F 16. a. Dire perché esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ soddisfacente le quattro condizioni seguenti: $f(1,0,0,1) = (2,0,0,2) \qquad f(0,1,1,0) = (1,1,1,1)$
$f(1,2,0,0) = (0,0,0,2) \qquad f(0,0,0,2) = (0,1,1,4)$

b. Scrivere $A_f^{\mathcal{B}}$, matrice associata a f tramite la base $\mathcal{B} : (1,0,0,1), (0,1,1,0), (1,2,0,0), (0,0,0,2)$.

c. Determinare $\dim(\ker(f)), \dim(\mathrm{Im}\,(f))$, una base per $\mathrm{Im}\,(f)$ e una per $\ker(f)$.

d. Calcolare $f(x,y,z,t)$ per ogni $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

C 17. Sia $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ così definita: $\varphi(P(x)) = P'(x) - xP''(x)$. Provare che φ è applicazione lineare di $\mathbb{R}_3[x]$ in sé; determinare una base per $\ker \varphi$; scrivere $A_\varphi^{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B}$ è la base $1, x, x^2, x^3$ e scrivere $A_\varphi^{\mathcal{D}}$ dove $\mathcal{D} : 1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3$.

C 18. Sia $W = \{P(x) \in \mathbb{R}_3[x] : P(1) = 0\}$ sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$. Scrivere una base di W e provare che l'applicazione $\varphi : W \to W$ definita come $\varphi(P(x)) = P'(x)(x-1)$ è lineare. Scrivere poi la matrice associata a φ rispetto alla base scelta per W.

A 19. Sia $V = L\{\sin(x), \cos(x)\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$. Provare che l'applicazione $\varphi : V \to C^\infty(\mathbb{R})$ definita come $\varphi(f(x)) = f(x + \pi/3)$ è lineare ed è un'applicazione di V in sé. Scriverne la matrice associata rispetto alla base di V costituita da $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

C 20. Scrivere la matrice associata alla φ dell'esercizio 05. rispetto alla base "canonica" di $M_{22}(\mathbb{R})$.

C 21. Sia φ come in 11. e sia $U = L\{(2,0,1,0), (0,2,0,1)\}$. Provare che $\varphi^{-1}(2,0,1,0) = \emptyset$ e che $\varphi^{-1}(0,2,0,1) = \emptyset$, ma che, nonostante ciò, $\varphi^{-1}(U)$ è un sottospazio e che ha dimensione 2; determinarne quindi una base.

T 22. Sia $\varphi : V \to W$ una applicazione lineare non iniettiva. Provare che se w è un vettore di W tale che $\varphi^{-1}(w) \neq \emptyset$, allora $\varphi^{-1}(w)$ è un insieme infinito.

A 23. Sia $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \varphi(P(x)) = (P(1), P(2), P(3))$. Provare che φ è applicazione lineare <u>surgettiva</u>, scrivere tutti i vettori di $\ker \varphi$ e provare che $\ker \varphi$ non ha dimensione finita.

A 24. Provare che l'applicazione $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $\varphi(z) = \overline{z}$ è $\mathbb{R}$-lineare (ma non $\mathbb{C}$-lineare) e scrivere la matrice associata a φ rispetto alla base di $\mathbb{C}$ $\mathcal{B} : 1, 1+i$.

COSTRUZIONE DI APPLICAZIONI LINEARI

F 30. Definire due applicazioni lineari distinte $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aventi $L\{(1,1,1)\}$ come nucleo e $\{(x,y,z) : x + y - z = 0\}$ come immagine.

F 31. Definire una applicazione lineare iniettiva $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\varphi(1,1,1) = (1,2,0,-1)$ e $\mathrm{Im}\,\varphi$ non contenga nessuno dei vettori della base canonica.

F 32. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $(1,0,0,1)$ e $(0,1,2,2)$. Definire un'applicazione lineare φ di $\mathbb{R}^4$ in sé tale che $\ker \varphi = \mathrm{Im}\,\varphi = V$.

F 33. Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $\ker f = \mathrm{Im}\, f$? E una tale che $\mathrm{Im}\, f \subset \ker f$?

C 34. Definire una applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ tale che $\varphi((x-1)^4) = (x-1)^3$ e tale che $\mathrm{Im}\,\varphi = \{P(x) : P(1) = P'(1) = 0\}$.

A 35. Definire un'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to M_{22}(\mathbb{R})$ tale che $\ker \varphi = \{P(x) : P(1) = 0\}$ e $\det(\varphi(x+1)^2) = 1$.

F 36. Dire perché non esiste un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in sé tale che
$\varphi(1,0,1) = (3,0,1) \qquad \varphi(0,1,0) = (0,0,1) \qquad \varphi(0,1,1) = (0,1,0) \qquad \varphi(1,2,2) = (4,5,6)$

F 37. Dire per quale $a \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(1,1) = (3,1,1)$, $\varphi(0,1) = (0,1,1)$ e $\varphi(2,a) \in L\{(1,-1,0), (2,1,-1)\}$.

F 38. Definire un'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(1,0,1) = \varphi(2,0,2) = (0,1,1)$ e $\mathrm{Im}\,(f) = L\{(0,1,0)\,,\,(0,2,3)\}$.

C 39. Definire un'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(1,2,0) = \varphi(0,0,-1)$; inoltre $\ker \varphi$ abbia dimensione 1 e $\ker \varphi$ sia contenuto in $\mathrm{Im}\,\varphi$.

F 40. Dire perché esiste un'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ soddisfacente le tre condizioni a lato e dire perché non è unica.
Definire poi una φ che soddisfi le tre condizioni e tale che $\ker \varphi$ abbia dimensione 1.

$$\left| \begin{array}{l} \varphi(1,1,2) = (2,2,1) \\ \varphi(0,1,1) = (0,1,1) \\ \varphi(1,0,1) = (2,1,0) \end{array} \right.$$

COMPOSIZIONI, INVERSE, ENDOMORFISMI

F 41. Siano φ e ψ applicazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ in sé così definite:
$\varphi(x,y,z) = (x+y\ ,\ y\ ,\ y)$ $\qquad \psi(x,y,z) = (x+z\ ,\ z-x\ ,\ x)$.
Descrivere $\varphi \circ \psi$, $y \circ \psi$, φ^2 , ψ^2 e determinare basi per i loro nuclei e le loro immagini.

F 42. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\varphi(x,y,z) = (2x-y\ ,\ y-2z\ ,\ x-z)$.
a. Calcolare $\varphi(1,1,1)$, $\varphi^2(1,1,1)$, $\varphi^3(1,1,1)$ e $\varphi^{-1}(1,1,1)$.
b. Dire che applicazione è $\varphi^2 - 1$ e dimostrare che è bigettiva.

C 43. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\varphi(x,y,z) = (x+y\ ,\ 3y-z)$. Risolvere tra i seguenti due problemi quello che ha soluzione e dire perché l'altro non ne ha:
a. Definire $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\psi \circ \varphi = 1$. (cosa significa 1 ?)
b. Definire $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi \circ \psi = 1$. (cosa significa 1 ?)

F 44. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\varphi(x,y,z) = (z,x,-y)$. Provare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi^n = 1$. Dedurne che φ è invertibile e che φ^{-1} è una potenza di φ.

45. Sia $V = L\{\cos(x), \sin(x)\} \subset C^\infty(\mathbb{R})$
C a. Sia $\varphi : V \to V$ l'applicazione lineare definita come $\varphi(f(x)) = f(x+\pi/3)$. Provare che esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi^n = 1$ e determinare il minimo di questi n.
A b. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $\varphi : V \to V$ l'applicazione lineare definita come $\varphi(f(x)) = f(x+\alpha)$. Dire per quali α esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi^n = 1$.

F 46. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\varphi(x,y,z) = (y\ ,\ y+z\ ,\ -y-z)$. Provare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi^n = 0$ (che cosa significa 0 ?) e determinare il minimo di questi n.

T 47. Siano $\varphi : V \to W$ e $\psi : W \to U$ applicazioni lineari di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Provare che:
a. $\ker\varphi \subset \ker(\psi \circ \varphi)$
b. $\operatorname{Im}(\psi \circ \varphi) \subset \operatorname{Im}\psi$
c. Se $\psi \circ \varphi = 0$ allora $\operatorname{Im}\varphi \subset \ker\psi$. È vero il viceversa ?
d. Se φ e ψ sono iniettive, allora $\psi \circ \varphi$ è iniettiva.
e. Se φ e ψ sono surgettive, allora $\psi \circ \varphi$ è surgettiva.

T 48. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker\varphi \neq \{0\}$. Provare che esistono $\alpha, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\alpha, \psi \neq 0$ tali che $\varphi \circ \alpha = 0$, $\psi \circ \varphi = 0$.

A 49. Sia $\mathcal{W}$ lo spazio vettoriale costituito da tutte le applicazioni lineari $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Determinare la dimensione del sottospazio costituito dalle applicazioni lineari φ tali che $\varphi(1,2,3) = (0,0,0)$ e $\varphi(2,0,2) = \varphi(1,1,1)$.

C 50. Sia $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $\varphi(x,y,z) = (x+y\ ,\ y+z\ ,\ x)$. Provare che φ è invertibile e determinare $\varphi^{-1}(x,y,z)$ per ogni (x,y,z).

A 51. Definire una applicazione lineare $\varphi : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ tale che $\ker\varphi \subset \operatorname{Im}\varphi \subset \ker\varphi^2$ e le dimensioni di questi spazi siano rispettivamente $2,3,4$.

A 52. Sia $\varphi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'applicazione lineare definita come $\varphi(x,y,z,t) = (x+y-t\ ,\ x-y\ ,\ 2x-t\ ,\ z)$. Definire un'applicazione lineare $\psi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ tale che, detta ψ_1 la restrizione di ψ a $\operatorname{Im}\varphi$ si abbia $\varphi \circ \psi_1 = 1$.

A 53. Sia $A \in M_{44}(\mathbb{C})$ matrice di caratteristica 3. Dire in quali casi $\varrho(A \cdot B) = 3$ se $B \in M_{44}(\mathbb{C})$.

A 54. Sia A la matrice a lato. Determinare $B \in M_{44}(\mathbb{R})$ tale che $A \cdot B = 0$ e $B \cdot A$ abbia la massima caratteristica possibile.

A 55. Sia A come in 54. Determinare $B \in M_{44}(\mathbb{R})$ tale che $B \cdot A = 0$ e $A \cdot B$ abbia la massima caratteristica possibile.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A 56. Sia A come in 54. Determinare $B \in M_{44}(\mathbb{R})$ tale che $A \cdot B = B \cdot A = 0$ e B abbia la massima caratteristica possibile.

A 57. Determinare una matrice $B \in M_{44}(\mathbb{C})$ tale che $\varrho(A \cdot B) = 2$ e $\varrho(B \cdot A) = 3$ (dove A è la matrice a lato)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$