01. a. Sì: è definita mediante le forme lineari $x, y, \pi y$.
b. No: $f(0,0,0) \neq (0,0,0)$.
c. Sì: è l'applicazione costante <u>nulla</u>.
d. Si ha: $f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = \vec{x}_1 \wedge \vec{w} + \vec{x}_2 \wedge \vec{w}$ $\qquad f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \wedge \vec{w}$
e coincidono per la distributività del prodotto vettore.
Analogamente $\quad af(\vec{x}) = a(\vec{x} \wedge \vec{w}) \qquad f(a\vec{x}) = (a\vec{x}) \wedge \vec{w} \qquad$ quindi coincidono.
e. No: in generale $f(X) + f(Y) \neq f(X + Y)$.
Infatti esistono molte matrici X, Y tali che: $\det(X) + \det(Y) \neq \det(X + Y)$ (per esempio $X = I$ e $Y = I$). In questi casi:
$f(X)+f(Y) = (\det(X), 0)+(\det(Y), 0) = (\det(X) + \det(Y), 0) \quad f(X+Y) = (\det(X+Y), 0)$
e sono differenti.
f. Si ha:
$f(X_1) + f(X_2) = AX_1A + AX_2A = A(X_1 + X_2)A \qquad f(X_1 + X_2) = A(X_1 + X_2)A$
quindi coincidono.
Analogamente $\quad af(X) = a(AXA) \qquad f(aX) = A(aX)A \qquad$ quindi coincidono.
g. Sì: $af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = a\Big(\vec{x} \cdot (1,2,0)\ ,\ \vec{x} \cdot (2,0,-1)\Big) + b\Big(\vec{y} \cdot (1,2,0)\ ,\ \vec{y} \cdot (2,0,-1)\Big) =$
$= \Big(a\vec{x} \cdot (1,2,0)\ ,\ a\vec{x} \cdot (2,0,-1)\Big) + \Big(b\vec{y} \cdot (1,2,0)\ ,\ b\vec{y} \cdot (2,0,-1)\Big) =$
$= \underline{\Big(a\vec{x} \cdot (1,2,0) + b\vec{y} \cdot (1,2,0)\ ,\ a\vec{x} \cdot (2,0,-1) + b\vec{y} \cdot (2,0,-1)\Big)}$
$f(a\vec{x} + b\vec{y}) = \underline{\Big((a\vec{x} + b\vec{y}) \cdot (1,2,0)\ ,\ (a\vec{x} + b\vec{y}) \cdot (2,0,-1)\Big)}$
e i due vettori sottolineati coincidono per le note proprietà dei prodotti scalari.

02. La matrice è quella a lato formata coi coefficienti delle forme lineari che definiscono f.
Il nucleo è costituito dai vettori (x, y, z) tali che $f(x, y, z) = 0$ cioè tali che $(x + y - z\ ,\ 2x - y\ ,\ 3x - z\ ,\ 3y - 2z) = (0, 0, 0, 0)$.
Quindi occorre risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice, riducendola:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora è ridotta e le ∞^1 soluzioni sono: $\begin{cases} x = (1/3)z \\ y = (2/3)z \\ z = z \end{cases}$

Perciò $\ker(f) = \left\{ \left(\frac{1}{3}z\ ,\ \frac{2}{3}z\ ,\ z \right) \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ 1 \right) z \right\}$. Una base per $\ker(f)$ è per esempio quella costituita dal vettore $(1/3, 2/3, 1)$ oppure dal vettore proporzionale $(1, 2, 3)$.
Quindi $\dim(\ker(f)) = 1$, per cui $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 2$.
Per determinare una base per l'immagine, basta trovare due vettori linearmente indipendenti in $\mathrm{Im}\,(f)$. Calcoliamo ad esempio: $f(1, 0, 0) = (1, 2, 3, 0) \quad ; \quad f(0, 1, 0) = (1, -1, 0, 3)$.
I vettori $(1, 2, 3, 0) \quad , \quad (1, -1, 0, 3)$ appartengono a $\mathrm{Im}\,(f)$, sono due, sono linearmente indipendenti, perché due e non proporzionali, pertanto costituiscono una base per $\mathrm{Im}\,(f)$.

03. Scriviamo la matrice associata A formata coi coefficienti delle forme lineari che definiscono f e riduciamola.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Evidentemente la matrice ha caratteristica 2, quindi il nucleo ha dimensione $4 - 2 = 2$ ed è lo spazio generato da due qualunque soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato ad A. Il sistema ha le ∞^2 soluzioni $(3z + t\ ,\ -2z - t\ ,\ z\ ,\ t)$.
Per esempio i vettori $(1, -1, 0, 1)$ e $(3, -2, 1, 0)$ formano una base per il nucleo e così pure i vettori $(4, -3, 1, 1)$ e $(-1, 1, 0, -1)$, dato che, in entrambi i casi, sono due vettori linearmente indipendenti in uno spazio che ha dimensione 2.

L'immagine ha dimensione 2, quindi come base bastano due suoi vettori linearmente indipendenti. Per esempio calcoliamo $f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 1, 1)\ ,\ f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 2, 0)$. I due vettori

$(1,0,1,1)$, $(1,1,2,0)$ sono vettori dell'immagine, sono linearmente indipendenti, perché due e non proporzionali, quindi $(1,0,1,1)$, $(1,1,2,0)$ è una base per l'immagine.
Analogamente i due vettori $(-1,2,1,-3)$, $(0,1,1,-1)$ (che sono rispettivamente $f(0,0,1,0)$ e $f(0,0,0,1)$) formano un'altra base per $\mathrm{Im}\,(f)$.

I vettori v tali che $f(v)=(0,1,1,-1)$ sono quelli che risolvono il sistema a lato. Il sistema ha come matrice dei coefficienti A e come termini noti le coordinate del vettore in questione. Il sistema si riduce quindi con le stesse operazioni fatte su A, quindi basta prendere la matrice ridotta e applicare al vettore le stesse due operazioni elementari. Si ottiene la matrice ridotta a lato. Il sistema ridotto ha ∞^2 soluzioni cioè $(3z\ ,\ -2z-t\ ,\ z\ ,\ t+1)$.
L'analogo sistema per $(1,0,0,-1)$ non ha soluzioni e quindi non ci sono vettori il cui trasformato è $(1,0,0,-1)$.

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y+2z+t=1 \\ x+2y+z+t=1 \\ x-3z-t=-1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

04. a. Se $\ker(f)=\{(0,0,0)\}$, allora $\dim(\ker(f))=0$. Poiché $\dim(\mathrm{Im}\,(f))=\dim(\mathbb{R}^4)-\dim(\ker(f))$, allora $\dim(\mathrm{Im}\,(f))=4$, ma questo non può mai succedere perché $\mathrm{Im}\,(f)$ è sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

b. Per ottenere $f(1,1,-2,0)$ occorre moltiplicare A per il vettore posto in forma di matrice colonna; si ottiene $f(1,1,-2,0)=(k-2\ ,\ k-2\ ,\ -k+4)$.
Analogamente $f(0,0,1,1)=(2\ ,\ 2\ ,\ k-4)$.
Coincidono se $k-2=2 \quad ; \quad k-2=2 \quad , \quad -k+4=k-4$.
In tutte le tre eguaglianze risulta $k=4$. Questo è l'unico k che soddisfa la richiesta.

c. Occorre la caratteristica di A, quindi la riduciamo; basta l'operazione $R_3 \to R_3-R_1$.
La matrice è ora ridotta con 3 pivot per $k \neq 0,1,3$. Per questi valori, $\varrho(A)=3$, quindi l'immagine ha dimensione 3 e il nucleo ha dimensione 1. Esaminiamo i tre casi particolari:

$$\begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-3 & -3 \end{pmatrix}$$

• Se $k=3$, la matrice è ancora ridotta con 3 pivot, quindi $\dim(\mathrm{Im}\,(f))=3$; $\dim(\ker(f))=1$

• Se $k=1$ la matrice è subito ridotta con due pivot se eliminiamo R_2 identica a R_1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

• Se $k=0$ la matrice è subito ridotta con due pivot se eseguiamo $R_3 \to R_3+3R_2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

In entrambi i casi $\dim(\mathrm{Im}\,(f))=2 \quad \dim(\ker(f))=2$

d. Basta esaminare il sistema che ha come matrice dei coefficienti A e come termini noti le coordinate del vettore $(1,0,1)$.
Il sistema si riduce quindi con le stesse operazioni fatte su A e si ottiene la matrice a lato in cui è stata fatta sulla colonna dei termini noti l'operazione $R_3 \to R_3-R_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k-1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Per $k \neq 0,1,3$ il sistema è ridotto e ha soluzioni. Esaminando i tre casi particolari, si vede subito che ha soluzioni per $k=3$ e per $k=0$, ma non per $k=1$, quindi:
Il vettore $(1,0,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}\,(f)$ se e solo se $k \neq 1$.

05. a. Per trovare $f(i,1,1)$ basta eseguire il prodotto: $\begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2i \end{pmatrix}$
Quindi $f(i,1,1)=(-2,2i)$.

b. Riduciamo A: $\begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2-iR_1 \quad \begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Quindi $\varrho(A)=1$ da cui $\dim(\mathrm{Im}\,(f))=1$ e $\dim(\ker(f))=2$.
Il nucleo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato ad A: $\ker(f)=\{(-iz,y,z)\}$ e una sua base è $(-i,0,1),(0,1,0)$.
Una base per l'immagine è data per esempio dal vettore $(-2,2i)$ trovato sopra.

c. Per trovare i v tali che $f(v)=(1+i,1-i)$ risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & -1 & 1+i \\ 1 & 0 & i & 1-i \end{array}\right) R_2 \to R_2-iR_1 \left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & -1 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le soluzioni sono $\left(\dfrac{z+1+i}{i}\ ,\ y\ ,\ z\right)=(-iz-i+1\ ,\ y\ ,\ z)$

06. Esiste un'unica applicazione lineare che soddisfa le quattro condizioni perché i quattro vettori $(1,2,3,4)$, $(1,-1,1,1)$, $(0,0,2,3)$, $(0,0,5,-2)$ di cui è data l'immagine costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$, dato che la matrice delle coordinate dei quattro vettori ha determinante diverso da zero (il determinante è immediato, dato che è triangolare inferiore a blocchi).
I vettori trasformati $(0,0,0,0)$, $(1,1,1,1)$, $(2,3,4,-1)$, $(0,0,0,0)$ costituiscono un sistema di generatori per l'immagine. Basta scartare i due vettori nulli per avere due vettori non proporzionali che formano perciò una base per $\mathrm{Im}\,(f)$.
Dato che $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Im}\,(f))$, allora il nucleo ha dimensione 2. Dalla definizione di f si vede subito che $f(1,2,3,4) = (0,0,0,0) \quad f(0,0,-5,2) = (0,0,0,0)$, quindi si ha $(1,2,3,4),(0,0,-5,2) \in \ker(f)$.
I due vettori, essendo non proporzionali, formano perciò una base per $\ker(f)$.

07. a. Perché i due vettori non proporzionali $(1,2),(1,1)$ formano una base per $\mathbb{R}^2$.

b. Esprimiamo $(1,0)$ e $(0,1)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,2)$ e $(1,1)$. Come si calcola facilmente:

$(1,0) = -(1,2) + 2(1,1)$ da cui
$f(1,0) = -f(1,2) + 2f(1,1) = -(0,2,2) + 2(2,1,0) = (4,0,-2)$

Analogamente:

$(0,1) = 1(1,2) - 1(1,1)$ da cui
$(0,1) = f(1,2) - f(1,1) = (0,2,2) - (2,1,0) = (-2,1,2)$

Poiché $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^2)$, allora $\dim(\mathrm{Im}\,(f))$ non può essere più di 2. Dalla definizione di f, è evidente che i due vettori $(0,2,2),(2,1,0)$ appartengono a $\mathrm{Im}\,(f)$; inoltre sono linearmente indipendenti perché non sono proporzionali, quindi $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 2$ ed essi ne costituiscono una base.

08. a. Perché $(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)$ è una base di $\mathbb{R}^4$, dato che la matrice delle coordinate dei quattro vettori ha determinante diverso da zero (il determinante è immediato, dato che è triangolare inferiore).

b. I quattro vettori $(0,1,2,4)$, $(0,1,1,2)$, $(0,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$ (trasformati dei vettori che definiscono l'applicazione) generano l'immagine, quindi per determinare $\dim(\mathrm{Im}\,(f))$ basta calcolare la caratteristica della matrice delle coordinate dei quattro vettori:
Si vede subito che la matrice ha determinante 0 e che c'è una sottomatrice 3×3 con determinante diverso da zero, quindi la caratteristica è 3.
Pertanto $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 3 \quad$ e $\quad \dim(\ker(f)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 1$
Una base per $\mathrm{Im}\,(f)$ si può estrarre dai quattro vettori che la generano.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \cline{2-4} 4 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La sottomatrice inquadrata con determinante non nullo mostra che i tre ultimi vettori $(0,1,1,2)$, $(0,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base per l'immagine.

c. Per questo occorre conoscere la matrice associata A. per scrivere A bisogna calcolare $f(v)$ per ogni vettore v della base canonica. Calcoliamo allora:

- $f(0,0,0,1) = \underline{(1,0,1,0)}$ (immediato dalla quarta uguaglianza che definisce f).
- $f(0,0,1,0) = f(0,0,1,1) - f(0,0,0,1) = (0,1,0,0) - (1,0,1,0) = \underline{(-1,1,-1,0)}$
- $f(0,1,0,0) = f(0,1,1,1) - f(0,0,1,1) = (0,1,1,2) - (0,1,0,0) = \underline{(0,0,1,2)}$
- $f(1,0,0,0) = f(1,1,1,1) - f(0,1,1,1) = (0,1,2,4) - (0,1,1,2) = \underline{(0,0,1,2)}$.

Le colonne della matrice sono le immagini dei vettori della base canonica. Immediatamente si ha:
$f(x,y,z,t) = (-z-t\ ,\ z\ ,\ x+y-z+t\ ,\ 2x+2y)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d. Senza risolvere il sistema associato alla matrice, si può notare che $f(1,0,0,0) = f(0,1,0,0)$ dato che la prima e la seconda colonna della matrice coincidono, per cui $f(1,0,0,0) - f(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$
Per la linearità di f, allora $f(1,-1,0,0) = (0,0,0,0)$. Quindi $(1,-1,0,0)$ appartiene al nucleo e ne forma una base, dato che, come abbiamo già visto, il nucleo ha dimensione 1.

09. Una base per $\mathrm{Im}\,(f)$ è per esempio $(1,0,1)$, $(1,-1,0)$. Occorre poi che $f(1,1,1) = (0,0,0)$. Ovviamente una sola condizione non basta. Per completare la definizione di f, completiamo a base il vettore $(1,1,1)$ per esempio con $(0,1,0),(0,0,1)$. Quindi f può essere definita in uno

dei seguenti due modi:
$f_1(1,1,1) = (0,0,0)$; $f_1(0,1,0) = (1,0,1)$; $f_1(0,0,1) = (1,-1,0)$
$f_2(1,1,1) = (0,0,0)$; $f_2(0,1,0) = (1,-1,0)$; $f_2(0,0,1) = (1,0,1)$.
Le due applicazioni lineari sono completamente definite perché $(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$, sono evidentemente distinte ed è anche chiaro che il loro nucleo e la loro immagine sono quelle richieste.

10. Completiamo $(1,0,0,1),(0,1,2,2)$ base di $\mathbb{R}^4$ per esempio con $(0,0,1,0),(0,0,0,1)$ e consideriamo per esempio l'applicazione lineare definita a lato. È chiaro che $\ker(f) = L\{(1,0,0,1),(0,1,2,2)\}$ e che anche $\mathrm{Im}\,(f) = L\{(1,0,0,1),(0,1,2,2)\}$.
$$\begin{array}{|l} f(1,0,0,1) = (0,0,0,0) \\ f(0,1,2,2) = (0,0,0,0) \\ f(0,0,1,0) = (1,0,0,1) \\ f(0,0,0,1) = (0,1,2,2) \end{array}$$
L'applicazione lineare f è completamente definita perché $(1,0,0,1)$, $(0,1,2,2)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ è una base per $\mathbb{R}^4$.

11. Si ha subito: $f(1,1,1) = (1,0,2)$ e $f(0,1,2) = (0,0,0)$.
Le due condizioni non definiscono completamente un'applicazione lineare, perché $(1,1,1)$, $(0,1,2)$ non è base per $\mathbb{R}^3$.
Occorre completare i due vettori linearmente indipendenti a base, il che si può fare in molti modi, per esempio scegliamo come terzo vettore $(0,0,1)$. Ora l'applicazione lineare è definita dalle tre condizioni a lato.
$$\begin{array}{|l} f(1,1,1) = (1,0,2) \\ f(0,1,2) = (0,0,0) \\ f(0,0,1) = (0,1,3) \end{array}$$
Che soddisfi la prima e la terza condizione è evidente. L'immagine ha dimensione 2, dato che è generata da $(1,0,2),(0,1,3)$, quindi il nucleo ha dimensione 1. Poiché $(0,1,2) \in \ker(f)$, allora $\ker(f) = L\{(0,1,2)\}$, come richiesto.

12. Da $f(1,2,0) = f(0,0,-1)$ si ha: $f(1,2,0) - f(0,0,-1) = (0,0,0)$.
Per la linearità $f((1,2,0) - (0,0,-1)) = (0,0,0)$.
Quindi si ha $f(1,2,1) = (0,0,0)$ per cui $(1,2,1) \in \ker(f)$.
Se quindi poniamo $\ker(f) = L\{(1,2,1)\}$ e $\mathrm{Im}\,(f) = L\{(1,2,1),(0,0,-1)\}$ si hanno tutte le condizioni richieste. Completiamo allora $(1,2,1)$ a base di $\mathbb{R}^3$ per esempio con $(0,1,0),(0,0,-1)$.
L'applicazione può per esempio essere così definita:
$f(1,2,1) = (0,0,0)$ $f(0,1,0) = (1,2,1)$ $f(0,0,1) = (0,0,-1)$.
L'applicazione è completamente definita perché $(1,2,1),(0,1,0),(0,0,-1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e soddisfa le condizioni date perché perché l'immagine ha dimensione 2 e contiene il nucleo che ha dimensione 1.

13. a. No, perché $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$.
b. Sì, per esempio l'applicazione identicamente nulla, in cui $\ker(f) = \mathbb{R}^3$ e $\mathrm{Im}\,(f) = \{(0,0,0)\}$

14. Completiamo $(1,1,1)$ a base per $\mathbb{R}^3$ per esempio con $(0,1,0),(0,0,1)$ e definiamo f su questa base. Cerchiamo quindi due altri vettori di $\mathbb{R}^4$ linearmente indipendenti con $(1,2,0,-1)$ per esempio $(0,0,1,1),(1,1,0,0)$, e poniamo
$$f(1,1,1) = (1,2,0,-1) \qquad f(0,1,0) = (0,0,1,1) \qquad f(0,0,1) = (1,1,0,0).$$
L'applicazione f è completamente definita perché $(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
Evidentemente $\mathrm{Im}\,(f) = L\{(1,2,0,-1)\,,\,(0,0,1,1)\,,\,(1,1,0,0)\}$.
Il vettore $(1,0,0,0)$ non appartiene a $\mathrm{Im}\,(f)$ perché come si verifica subito il sistema lineare associato alla matrice non ha soluzioni. Analogamente nessuno degli altri tre vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ sta in $\mathrm{Im}\,(f)$.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Dato poi che $\mathrm{Im}\,(f)$ ha dimensione 3, allora $\dim(\ker(f)) = 0$ per cui $\ker(f) = \{0,0,0\}$.
La scelta dei due vettori di $\mathbb{R}^4$ è stata fatta in modo casuale. Se per caso un qualche vettore della base canonica di $\mathbb{R}^4$ appartenesse a $\mathrm{Im}\,(f)$, occorrerebbe modificare questa scelta.

15. Esprimiamo $(2,k)$ come combinazione lineare dei due vettori $(1,1),(0,1)$ che costituiscono base per $\mathbb{R}^2$. Si ha: $(2,k) = 2(1,1) + (k-2)(0,1)$.
Quindi $f(2,k) = 2f(1,1) + (k-2)f(0,1) = 2(3,1,1) + (k-2)(0,1,1) = (6,k,k)$
Vediamo ora per quali k il vettore $(6,k,k)$ appartiene a $L\{(1,-1,0),(2,1,-1)\}$
Scriviamo l'eguaglianza $(6,k,k) = x(1,-1,0) + y(2,1,-1)$. Questo è un sistema lineare in x,y che, come si verifica subito, ha soluzioni solo per $k = -3/2$. Quindi questo è l'unico k per cui esiste la f.
$$\begin{cases} 6 = x + 2y \\ k = -x + y \\ k = -y \end{cases}$$

16. I quattro vettori $(1,2,2),(1,0,1),(0,1,0),(0,1,1)$ sono linearmente dipendenti (quattro vettori in $\mathbb{R}^3$) ed è possibile trovare la loro relazione di lineare dipendenza (unica a meno di fattori di proporzionalità):
$$(1,2,2) = (1,0,1) + (0,1,0) + (0,1,1)$$
Se esistesse f lineare che soddisfa le quattro condizioni, applicando la f si avrebbe:
$$f(1,2,2) = f(1,0,1) + f(0,1,0) + f(0,1,1) \text{ cioè}$$
$$(4,5,6) = (3,0,1) + (0,0,1) + (0,1,0)$$
E tale relazione è falsa, come si verifica immediatamente.

17. I tre vettori $(1,1,2),(0,1,1),(1,0,1)$ sono linearmente dipendenti, dato che la matrice delle coordinate dei tre vettori ha determinante zero. A questo punto occorre la loro relazione di lineare dipendenza (essenzialmente unica, a meno di fattore di proporzionalità) che è, come si calcola: $(1,1,2)-(0,1,1)-(1,0,1) = (0,0,0)$
La relazione è compatibile con la linearità di f dato che, applicando f si ottiene:
$f(1,1,2) - f(0,1,1) - f(1,0,1) = f(0,0,0)$ ovvero
$(2,2,1) - (0,1,1) - (2,1,0) = (0,0,0)$
L'applicazione lineare non è unica perché le tre condizioni si riducono a due sole, le prime due. Per avere un'applicazione lineare che soddisfi l'ultima condizione occorre completare a base i due vettori linearmente indipendenti $(1,1,2),(0,1,1)$ cosa fattibile in molti modi, per esempio mediante il vettore $(0,0,1)$.
Dato che $(1,1,2),(0,1,1)$ non appartengono a $\ker(f)$, allora $(0,0,1)$ dovrà far parte del nucleo.
A questo punto definiamo l'applicazione lineare mediante le tre condizioni seguenti:
$$f(1,1,2) = (2,2,1) \qquad f(0,1,1) = (0,1,1) \qquad f(0,0,1) = (0,0,0).$$
Il nucleo è quello assegnato, perché l'immagine ha dimensione due, dato che è generata dai due vettori $(2,2,1),(0,1,1)$, quindi il nucleo ha dimensione 1.

21. a. Basta calcolare $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}$ Quindi $f(1,2,1) = (7,14,7)$. Notiamo che $(1,2,1)$ è autovettore e che l'autovalore è 7.

b. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice. Si possono subito eliminare la terza riga identica alla prima e la seconda che è proporzionale alla prima.

Il sistema si riduce subito all'unica equazione $-x+2y+4z=0$, è ridotto e ha ∞^2 soluzioni dipendenti da y e z. Le soluzioni sono: $(2y+4z\ ,\ y\ ,\ z)$.

I vettori di $\ker(f)$ sono quindi $y(2,1,0)+z(4,0,1)$, perciò i vettori $(2,1,0)$ e $(4,0,1)$ generano $\ker(f)$.
Essendo linearmente indipendenti in quanto due e non proporzionali, allora costituiscono una base.

Quindi $\ker(f) = L\{(2,1,0)\ ,\ (4,0,1)\}$ e $\mathcal{B} : (2,1,0)\ ,\ (4,0,1)$ ne è una base.

c. Abbiamo: $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 3 - \dim(\ker(f)) = 1$
Quindi una base per $\mathrm{Im}\,(f)$ sarà formata da un suo qualunque vettore non nullo. Per esempio si ha: $f(1,0,0) = (-1,-2,-1)$ (prima colonna della matrice).

Quindi $(-1,-2,-1)$ è una base per $\mathrm{Im}\,(f)$.

d. Dato che il nucleo di f è diverso dallo spazio nullo, allora 0 è un autovalore per f e $\ker(f) = V_0$. Per quanto riguarda la sua molteplicità, visto che $\dim(V_0) \leq$ molteplicità(0) ha dimensione 2, allora la molteplicità dev'essere almeno 2.

Dato che poi, come abbiamo già calcolato, $f(1,2,1) = (7,14,7)$, allora $(1,2,1)$ è autovettore e quindi $\lambda = 7$ è autovettore con molteplicità almeno 1. L'unica possibilità affinché la somma delle molteplicità sia 3 è che gli autovalori siano:
$$\lambda_1 = 0 \text{ con molteplicità } 2 \qquad \lambda_2 = 7 \text{ con molteplicità } 1$$

e. A è diagonalizzabile perché, come abbiamo già rilevato:
- $\lambda_1 = 0$ è autovalore con molteplicità 2 e $\dim(V_0) = \dim(\ker(f)) = 2$
- $\lambda_2 = 7$ è autovalore con molteplicità 1 e se la molteplicità è 1, sicuramente $\dim(V_7) = 1$

Una base di autovettori può essere costruita mettendo insieme la base di V_0: $(2,1,0),(4,0,1)$ e una base di V_7, per esempio $(1,2,1)$ (che, come abbiamo visto, è autovettore).

La matrice P avrà nelle colonne le coordinate dei vettori della base di autovettori e la matrice diagonale D avrà sulla diagonale gli autovettori corrispondenti. $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

22. a. Per determinare una base per $\ker(f)$ basta risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice. Ha ∞^1 soluzioni e sono $(-z, -z, z)$ al variare di $z \in \mathbb{R}$. Quindi una base per $\ker(f)$ è $(1, 1, -1)$.

    b. Si vede immediatamente, eseguendo il prodotto $A \cdot [1 \ -1 \ 0]^T$, che $f(1, -1, 0) = (3, -3, 0)$, quindi $(1, -1, 0)$ è autovettore e l'autovalore relativo è 3.

    c. Il fatto che $\ker(f)$ sia diverso da $\{(0, 0, 0)\}$ dice che 0 è autovalore per f. D'altra parte abbiamo appena visto che anche 3 è autovalore. Potrebbe esserci un terzo autovalore non evidente, ma, prima di calcolare il polinomio caratteristico, determiniamo gli autospazi:

    - $\boxed{\lambda = 0}$ L'autospazio è il nucleo $L\{(1, 1, -1)\}$.
    - $\boxed{\lambda = 3}$ La matrice $A - 3I$ a lato ha evidentemente caratteristica 1, quindi il sistema omogeneo associato ha ∞^2 soluzioni che costituiscono l'autospazio. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

    Le soluzioni sono $(-y + z \ , \ y \ , \ z)$, quindi l'autospazio è $L\{(1, -1, 0), (1, 0, 1)\}$. Dato che $\dim(V_3) = 2$, ne concludiamo che la molteplicità di 3 come autovalore è almeno 2 ed è proprio 2, perché evidentemente non può essere superiore.
    Quindi il polinomio caratteristico è $-x(x - 3)^2$. Mettendo insieme i tre autovettori, il criterio fondamentale di diagonalizzabilità ci assicura (anche senza verificarne la lineare indipendenza) che $\mathcal{B} : (1, 1, -1), (1, -1, 0), (1, 0, 1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$, tutta fatta di autovettori.

23. A Dato che A è triangolare superiore, il polinomio caratteristico si calcola immediatamente ed è $(1-x)(2-x)(4-x)$. Quindi A ha i tre autovalori distinti $1, 2, 4$, ed è diagonalizzabile per il criterio fondamentale.

    B Dato che B è triangolare superiore a blocchi e il blocco superiore è a sua volta triangolare inferiore, il polinomio caratteristico è immediato ed è $(4 - x)(1 - x)(3 - x)$. Quindi B ha i tre autovalori distinti $1, 2, 4$, ed è diagonalizzabile per il criterio fondamentale.

    C Dato che C è triangolare superiore, il polinomio caratteristico è immediato ed è $(2 - x)^3$. Quindi C ha l'autovalore 2 con molteplicità 3. Se C fosse diagonalizzabile, si avrebbe $\dim(V_2) = 3$, da cui $\varrho(A - 2I) = 0$, cioè $A - 2I = 0$, ma evidentemente $A \neq 2I$, quindi C non è diagonalizzabile.

    D La matrice D è diagonalizzabile, dato che è simmetrica.

    E Dato che E è triangolare inferiore a blocchi e il blocco inferiore è a sua volta triangolare superiore, il polinomio caratteristico è immediato ed è $x^2(1-x)$. Quindi E ha ha l'autovalore 0 con molteplicità 2. Se fosse diagonalizzabile, si avrebbe $\dim(V_0) = 2$, da cui $\varrho(E - 0I) = 1$, cioè $\varrho(E) = 1$, ma evidentemente $\varrho(E) = 2$, quindi E non è diagonalizzabile.

    F Il polinomio caratteristico di F è $-x^3 + 3$, quindi gli autovalori sono le radici cubiche di 3. Due radici sono non reali. Quindi F non è diagonalizzabile come matrice reale, ma, dato che le radici cubiche di 3 sono distinte, allora è diagonalizzabile come matrice complessa per il criterio fondamentale.

24. Esiste un'unica applicazione lineare che soddisfa le tre condizioni perché i tre vettori $(0, 1, -2)$, $(3, 3, 0)$, $(0, 1, 1)$ di cui è data l'immagine costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, dato che la matrice delle coordinate non ha determinante 0. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

    Notiamo poi che ognuno di essi è autovettore (autovalori rispettivamente -1 , $1/3$, 0), quindi esistendo base di autovettori, f è diagonalizzabile.

25. I tre vettori $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 2, 0)$ di cui è data l'immagine sono linearmente dipendenti perché la matrice delle coordinate ha determinante 0. Quindi esiste una relazione di lineare dipendenza tra essi che è, come si calcola: $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
    $2(1, 1, 1) - (1, 0, 2) - (1, 2, 0) = (0, 0, 0)$
    La relazione non è compatibile con la linearità di f dato che, applicando f si otterrebbe:

$2f(1,1,1)-f(1,0,2)-f(1,2,0)=f(0,0,0)$ ovvero
$2(0,0,0)-(1,0,2)-(2,4,0)=(0,0,0)$
La relazione è falsa, pertanto non esiste alcuna f lineare che soddisfa le condizioni date.

26. La seconda condizione si può scrivere come $f(1,0,2)=(0,0,0)$. Esiste un'unica applicazione lineare che soddisfa le tre condizioni perché i tre vettori $(1,1,0)$, $(1,0,2)$, $(1-i\ ,\ 1\ ,\ -i)$ di cui è data l'immagine costituiscono una base di $\mathbb{C}^3$, dato che la matrice delle coordinate non ha determinante 0.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-i \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -i \end{pmatrix}$$
Notiamo poi che ognuno di essi è autovettore (autovalori rispettivamente 2 , 0 , i), quindi esistendo base di autovettori, f è diagonalizzabile.

27. a. L'applicazione deve essere definita così per soddisfare la condizione su nucleo e immagine:
$$f(1,0,2)=(0,0,0) \qquad f(v_2)=(1,1,1) \qquad f(v_3)=(1,0,2)$$
a condizione che $(1,0,2),v_2,v_3$ sia una base per $\mathbb{R}^3$. Per soddisfare la condizione sull'autovalore, occorre porre $v_2=(1/2,1/2,1/2)$. Come vettore v_3 scegliamone uno della base canonica, per esempio $v_3=(0,0,1)$. Quindi:
$$f(1,0,2)=(0,0,0) \qquad f(1/2,1/2,1/2)=(1,1,1) \qquad f(0,0,1)=(1,0,2)$$
o anche $f(1,0,2)=(0,0,0) \qquad f(1,1,1)=(2,2,2) \qquad f(0,0,1)=(1,0,2)$
L'applicazione è completamente definita perché $(1,0,2),(1,1,1),(0,0,1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ ed è anche chiaro che soddisfa le condizioni richieste.

b. Per scrivere la matrice occorre calcolare $f(v)$ per ogni vettore v della base canonica. Ogni vettore della base canonica va espresso come combinazione lineare dei vettori della base $(1,0,2),(1,1,1),(0,0,1)$.
Scriviamo: $(1,0,0)=a(1,0,2)+b(1,1,1)+c(0,0,1)$ da cui il sistema che ha la soluzione $a=1$; $b=0$; $c=-2$ quindi:
$$\begin{cases} 1=a+b \\ 0=b \\ 0=2a+b+c \end{cases}$$
$(1,0,0)=1(1,0,2)-2(0,0,1)$
$f(1,0,0)=1f(1,0,2)-2f(0,0,1)=\underline{(-2,0,-4)}$
Scriviamo: $(0,1,0)=a(1,0,2)+b(1,1,1)+c(0,0,1)$ da cui il sistema che ha la soluzione $a=-1$; $b=1$; $c=1$ quindi:
$$\begin{cases} 0=a+b \\ 1=b \\ 0=2a+b+c \end{cases}$$
$(0.1,0)=-1(1,0,2)+(1,1,1)+(0,0,1)$
$f(0,1,0)=-f(1,0,2)-f(1,1,1)+f(0,0,1)=\underline{(3,2,4)}$
Invece $f(0,0,1)=\underline{(1,0,2)}$ fa parte della definizione.
La matrice ha nelle colonne le coordinate dei vari $f(v)$.
$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

c. Il polinomio caratteristico è $-(x-2)x^2$, quindi $\lambda=0$ ha molteplicità due, ma l'autospazio è $V_0=\ker(f)$ che per costruzione ha dimensione 1. Quindi f non è diagonalizzabile.

d. Non è possibile, perché formebbero una base di autovettori, mentre, come abbiamo visto, f non è diagonalizzabile.

e. Questo è invece possibile. Per esempio $(1,0,2),(1,1,1),(2,2,2)$.

28. Come nel problema precedente, poniamo:
$$f(1,1,1)=(0,1,1) \qquad f(v_2)=(0,1,1) \qquad f(v_3)=(0,1,2)$$
a condizione che $(1,1,1),v_2,v_3$ sia una base per $\mathbb{R}^3$. Per soddisfare la condizione sugli autovalori poniamo *per esempio* $v_2=(0,1/2,1/2)$ e $v_3=(0,1/3,2/3)$.
Quindi l'applicazione può essere definita così:
$f(1,1,1)=(0,1,1) \qquad f(0,1/2,1/2)=(0,1,1) \qquad f(0,1/3,2/3)=(0,1,2)$ oppure
$f(1,1,1)=(0,1,1) \qquad f(0,1,1)=(0,2,2) \qquad f(0,1,2)=(0,3,6)$
Dato che $\dim(\mathrm{Im}\,(f))=2$, allora $\dim(\ker(f))=1$, per cui $\ker(f))\neq\{(0,0,0)\}$, pertanto 0 è autovalore.
Gli autovalori sono quindi, per costruzione $0,2,3$ tutti con molteplicità 1. Per il criterio di diagonalizzabilità, f è diagonalizzabile avendo 3 autovalori distinti.
L'applicazione f è necessariamente diagonalizzabile, indipendentemente dalle due scelte effettuate, perché i tre vettori linearmente indipendenti mediante la quale è stata definita sono sempre autovettori e un'applicazione che ha una base di autovettori è, per definizione, diagonalizzabile.

29. a. Completiamo a base di $\mathbb{R}^3$ i due vettori $(1,0,2),(0,1,-1)$ per esempio con $(0,0,1)$. Ponendo $f(0,0,1)=(0,0,1)$ si ottiene che 1 sia autovalore.

L'applicazione lineare può essere definita mediante le relazioni a lato ed è del tutto definita, perché $(1,0,2),(0,1,-1),(0,0,1)$ è base per $\mathbb{R}^3$. È chiaro che in questo modo $(1,0,2)$ e $(0,1,-1)$ sono autovettori relativi all'autovalore $\lambda=3$.

$$\left|\begin{array}{ll} f(1,0,2) & =(3,0,6) \\ f(0,1,-1) & =(0,3,-3) \\ f(0,0,1) & =(0,0,1) \end{array}\right.$$

b. Se f ha gli autovalori 1 e 3, il polinomio caratteristico è $(x-1)^n(x-3)^m$ e dev'essere $m\geq 2$, dato che $\dim(V_3)=2$. L'unica possibilità è che il polinomio caratteristico sia $(x-1)(x-3)^2$. Si ha $\dim(V_3)=2$ perché richiesto dal problema e $\dim(V_1)=1$, perché quando la molteplicità di un autovalore è 1, allora si ha sempre l'uguaglianza.
È ora chiaro che f dev'essere diagonalizzabile poiché soddisfa il criterio di diagonalizzabilità.

c. Per scrivere la matrice occorre calcolare $f(v)$ per ogni vettore v della base canonica.

$(1,0,0)=(1,0,2)-(0,0,2)$ da cui
$f(1,0,0)=f(1,0,2)-f(0,0,2)=(3,0,6)-(0,0,2)=\underline{(3,0,4)}$
$(0,1,0)=(0,1,-1)+(0,0,1)$ da cui
$f(0,1,0)=f(0,1,-1)+f(0,0,1)=(0,3,-3)+(0,0,1)=\underline{(0,3,-2)}$
$f(0,0,1)=\underline{(0,0,1)}$ dalla definizione.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

31. a. Le tre condizioni si possono così scrivere:
$$f(\vec{\imath}+\vec{\jmath})=\vec{0} \qquad f(\vec{\imath}-2\vec{k})=-2\vec{\imath}+4\vec{k} \qquad f(\vec{k})=4\vec{\imath}$$
Le condizioni definiscono un'unica applicazione lineare, perché i tre vettori $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$, $\vec{\imath}-2\vec{k}$, $\vec{k}$ formano una base per V_3. Identificando V_3 con $\mathbb{R}^3$ nel modo standard le tre condizioni diventano: $f(1,1,0)=(0,0,0)$ $f(1,0,-2)=(-2,0,4)$ $f(0,0,1)=(4,0,0)$.

b. Per calcolare gli autovettori di f bisogna determinare la matrice associata e quindi occorrono $f(\vec{\imath}),f(\vec{\jmath}),f(\vec{k})$.
Scriviamo: $(1,0,0)=a(1,1,0)+b(1,0,-2)+c(0,0,1)$.
Si trova che: $a=0$; $b=1$; $c=2$ quindi: $(1,0,0)=(1,0,-2)+2(0,0,1)$.
$$f(1,0,0)=f(1,0,-2)+2f(0,0,1)=(6,0,4)$$
Scriviamo: $(0,1,0)=a(1,1,0)+b(1,0,-2)+c(0,0,1)$.
Si trova che: $a=1$; $b=-1$; $c=-2$ quindi: $(0,1,0)=(1,1,0)-(1,0,-2)-2(0,0,1)$.
$$f(0,1,0)=f(1,1,0)-f(1,0,-2)-2f(0,0,1)=(-6,0,-4)$$
$f(0,0,1)=(4,0,0)$ già noto.
Da questi dati si ricava la matrice A.
$$A=\begin{pmatrix} 6 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$
Gli autovalori sono $0,-2,8$ e gli autovettori relativi sono:
$\boxed{\lambda=0}$: $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ e i suoi multipli (dalla definizione)
$\boxed{\lambda=-2}$: $\vec{\imath}-2\vec{k}$ e i suoi multipli (dalla definizione)
$\boxed{\lambda=8}$: $2\vec{\imath}+\vec{k}$ e i suoi multipli (risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A-8I$).
Si vede subito che gli ultimi due sono tra loro ortogonali, quindi due autovettori ortogonali di modulo 1 sono i loro normalizzati: $\dfrac{\vec{\imath}-2\vec{k}}{\sqrt{5}}$ $\dfrac{2\vec{\imath}+\vec{k}}{\sqrt{5}}$

32. a. Perché $(1,1,0),(1,-1,0),(1,1,2)$ è una base di $\mathbb{R}^3$, dato che la matrice delle coordinate dei tre vettori ha determinante diverso da zero (è triangolare superiore a blocchi).

b. È chiaro che $(1,-1,0)$ è autovettore e che l'autovalore è -1 e che anche $(1,1,2)$ è autovettore e che l'autovalore è 5

c. Per questo occorre calcolare $f(v)$ per ogni vettore v della base canonica.
Ogni vettore della base canonica va espresso come combinazione lineare dei vettori della base $(1,1,0),(1,-1,0),(1,1,2)$.

Per abbreviare i conti possiamo per esempio notare che $(1,1,0)+(1,-1,0)=(2,0,0)$. Quindi $f(1,1,0)+f(1,-1,0)=f(2,0,0)$ da cui $(1,1,4)+(-1,1,0)=f(2,0,0)$ ovvero $(0,2,4)=f(2,0,0)$ e quindi $f(1,0,0)=\underline{(0,1,2)}$.
Conoscendo $f(1,0,0)$ è facile ricavare $f(0,1,0)$:

$f(0,1,0) = f(1,1,0) - f(0,1,0) = (1,1,4) - (0,1,2) = \underline{(1,0,2)}$

Infine $(0,0,2) = (1,1,2)-(1,1,0)$ cioè $f(0,0,2) = f(1,1,2)-f(1,1,0) = (5,5,10)-(1,1,4)$.
In definitiva $f(0,0,2) = (4,4,6)$ e pertanto $f(0,0,1) = \underline{(2,2,3)}$.

Per concludere $f(x,y,z) = xf(1,0,0)+yf(0,1,0)+zf(0,0,1) = (2y+z\ ,\ x+2z\ ,\ 2x+2y+3z)$

d. Dai conti fatti sopra si scrive subito A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e. La matrice è sicuramente diagonalizzabile perché simmetrica.
Abbiamo già visto che 5 e -1 sono autovalori.
Potrebbe esserci un terzo autovalore non evidente, ma, prima di calcolare il polinomio caratteristico, determiniamo gli autospazi:

- $\boxed{\lambda = -1}$ La matrice $A+I$ ha tre righe proporzionali, quindi ha caratteristica 1 e il sistema omogeneo associato riduce immediatamente all'unica equazione $x+y+2z = 0$ che ha ∞^2 soluzioni, tra cui una è, come già notato $(1,-1,0)$ e un'altra linearmente indipendente è per esempio $(2,0,1)$. Da qui si deduce che il terzo autovalore è sempre -1.
- $\boxed{\lambda = 5}$ Riduciamo la matrice $A - 5I$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 + 5R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & -24 & 12 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

La matrice ha quindi caratteristica 2 e le soluzioni del sistema omogeneo associato sono $(z/2, z/2, z)$. Un autovettore è quindi per esempio $(1,1,2)$

La matrice P si ottiene mettendo le coordinate dei tre autovettori in colonna.
La matrice D è la matrice diagonale che ha nella diagonale tutti gli autovalori nell'ordine corrispondente.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

33. a. $\lambda_1 f(X_1) + \lambda_2 f(X_2) = \underline{(\lambda_1 X_1 \cdot B + \lambda_2 X_2 \cdot B)}$
$f(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \underline{(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) \cdot B}$
e le due matrici sottolineate notoriamente coincidono.

b. Per calcolare $\ker(f)$ si pone

$f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cioè $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ da cui $\begin{cases} x = 2y \\ z = 2t \end{cases}$ sistema con ∞^2 soluzioni

Quindi $\dim(\ker(f)) = 2$ e una base per il nucleo è per esempio $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Di conseguenza $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(M_{22}) - \dim(\ker(f)) = 2$.

Una base per $\mathrm{Im}\,(f)$ è per esempio $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (sono rispettivamente $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sono due e linearmente indipendenti).

c. Occorre calcolare <u>nell'ordine</u> $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si ha: $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha coordinate $[1\ \ -2\ \ 0\ \ 0]^T$ rispetto alla base "canonica". Analogamente si calcolano gli altri. La matrice associata è quindi la matrice a blocchi A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

d. La matrice A associata a f è a blocchi e i due blocchi sono identici e sono la matrice B. Quindi A è diagonalizzabile se lo è B. La matrice B è diagonalizzabile perché è simmetrica. Il polinomio caratteristico di B è $x^2 - 5x$, quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 0$.
Per $\lambda = 5$ un autovettore di B è $(1,-2)$, quindi due autovettori di f sono quelli con coordinate $[1\ -2\ 0\ 0]^T$ $[0\ 0\ 1\ -2]^T$ corrispondenti alle matrici $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ che generano V_5.
Per $\lambda = 0$, gli autovettori sono le matrici del nucleo, di cui abbiamo già trovato una base.

34. La verifica della linearità è analoga a quella del problema precedente.
Per quanto riguarda il nucleo, evidentemente $X \in \ker(f)$ se $X \cdot B = B \cdot X$, se cioè X commuta con B.
Per esempio I e B stessa commutano con B, quindi appartengono a $\ker(f)$. Dato che in $\ker(f)$ ci sono due vettori linearmente indipendenti, allora il nucleo ha almeno dimensione 2.

Calcoliamo ora: $f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3\\0&2\end{pmatrix}$.
Questi vettori sono linearmente indipendenti e appartengono a $\mathrm{Im}\,(f)$. Quindi anche $\mathrm{Im}\,(f)$ ha almeno dimensione 2.
In conclusione $\dim(\ker(f))=\dim(\mathrm{Im}\,(f))=2$ e abbiamo già trovato una base per entrambi.

35. a. Per scrivere la matrice occorre calcolare le immagini dei vettori che sono identificati con la base canonica nell'ordine giusto. Cominciamo con $\mathcal{B}$
$f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ e ha coordinate $[1\ 0\ 0\ 0]^T$ rispetto a $\mathcal{B}$. Proseguendo:
$f\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$
$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$
La matrice associata è quindi A.
Se invece usiamo l'identificazione attraverso $\mathcal{B}_1$, le immagini dei vettori sono le stesse, ma vanno calcolate in un altro ordine (scambiando le due centrali e le matrici immagine vanno lette per colonne. La matrice risulta perciò A_1.
$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$
b. La matrice A_1 è a blocchi e ogni blocco è la matrice E, quindi conviene lavorare su A_1. La matrice A_1 è diagonalizzabile se lo è E. Il polinomio caratteristico di E è $(x-1)^2$, quindi ha l'unico autovalore $\lambda_1=0$ con molteplicità 1, ma $\varrho(E-I)=1$, quindi E non è diagonalizzabile e non lo sono neppure A_1 e A.
Comunque due autovettori per f si vedono subito e sono le due matrici che generano l'unico autospazio e quindi tutti gli autovettori. $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

41. Associamo la matrice a un'applicazione lineare $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.
a. Il polinomio caratteristico è $(3-x)(3-x)-16=x^2-6x-7$ che ha le radici -1 e 7 entrambe con molteplicità 1.
L'autospazio relativo a $\lambda=-1$ ha quindi dimensione 1 ed è dato dalle soluzioni del sistema associato alla matrice $A+I=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}$. Una soluzione è per esempio $v=(1,-1)$.
L'autospazio relativo a $\lambda=7$ ha quindi dimensione 1 ed è dato dalle soluzioni del sistema associato alla matrice $A-7I=\begin{pmatrix}-4&4\\4&-4\end{pmatrix}$. Una soluzione è per esempio $w=(1,1)$.
b. Si ha $f^{100}(v)=(-1)^{100}v=v=(1,-1)$ $\qquad f^{100}(w)=7^{100}w=(7^{100},7^{100})$
c. Esprimiamo $(1,0)$ come combinazione lineare di v e w:
$(1,0)=a(1,-1)+b(1,1)$ da cui $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$. Si ha quindi: $(1,0)=\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}w$ da cui:
$${}^{100}(1,0)=\frac{1}{2}f^{100}(v)+\frac{1}{2}f^{100}(w)=\frac{1}{2}(1,-1)+\frac{1}{2}(7^{100},7^{100})=\left(\frac{7^{100}+1}{2}\,,\,\frac{7^{100}-1}{2}\right)$$

42. a. I tre vettori $(2,1,0),(1,1,0),(1,0,0)$ che definiscono f sono evidentemente linearmente dipendenti, avendo la terza componente nulla. Le condizioni sono:
$$\begin{array}{l} f(2,1,0)=(4,2,0)\\ f(1,1,0)=(3,1,0)\\ f(1,0,0)=(-3,-1,2)\end{array}$$
Si vede subito che $(2,1,0)-(1,1,0)=(1,0,0)$ ma si ha:
$$\begin{array}{ccccc} f(2,1,0)&-&f(1,1,0)&=&f(1,0,0)\\ =&&=&&=\\ (4,2,0)&-&(3,1,0)&\neq&(-3,-1,2)\end{array}$$
b. Anche qui i tre vettori sono linearmente dipendenti. Le condizioni sono:
$$\begin{array}{l} f(2,1,0)=(4,2,0)\\ f(1,1,0)=(3,1,0)\\ f(1,0,0)=(1,1,0)\end{array}$$
C'è sempre la relazione $(2,1,0)-(1,1,0)=(1,0,0)$ ma stavolta:
$$\begin{array}{ccccc} f(2,1,0)&-&f(1,1,0)&=&f(1,0,0)\\ =&&=&&=\\ (4,2,0)&-&(3,1,0)&=&(1,1,0)\end{array}$$
Le condizioni si riducono quindi a due, quindi esistono infinite applicazioni lineari che le soddisfano.
c. Le tre condizioni sono
$$\begin{array}{l} f(2,1,0)=(4,2,0)\\ f(1,1,0)=(3,1,0)\\ f(1,0,-1)=(-1,0,1)\end{array}$$
I tre vettori $(2,1,0),(1,1,0),(1,0,-1)$ sono linearmente indipendenti dato che il determinante della matrice a lato non è 0.
$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Quindi i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$, per cui esiste un'unica f lineare che soddisfa le condizioni:
Per scrivere la matrice associata occorre conoscere $f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)$.
Esprimiamo quindi i vettori della base canonica come combinazione lineare dei vettori della base su cui è definita f. Le combinazioni sono in questo caso evidenti:

Si ha: $(1,0,0) = (2,1,0) - (1,1,0)$ quindi:
$f(1,1,0) = f(2,1,0) - f(1,1,0) = (4,2,0) - (3,1,0) = \underline{(1,1,0)}$
Si ha: $(0,1,0) = (1,1,0) - (1,0,0)$ quindi:
$f(0,1,0) = f(1,1,0) - f(1,0,0) = (3,1,0) - (1,1,0) = \underline{(2,0,0)}$
Si ha: $(0,0,1) = (1,0,0) - (1,0,-1)$ quindi:
$f(0,0,1) = f(1,0,0) - f(1,0,-1) = (1,1,0) - (-1,0,1) = \underline{(2,1,-1)}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Ora si può scrivere la matrice A.

d. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$\det \begin{pmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 0 & \underline{-1-x} \end{pmatrix} = (-1-x)(x^2-x-2)$ Le radici sono quindi: $\lambda = -1$ con molteplicità 2, $\lambda = 2$ con molteplicità 1

Per $\lambda = 2$, dato che $f(2,1,0) = (4,2,0)$ è evidente che $(2,1,0)$ è un autovettore relativo.

Per $\lambda = -1$, dato che $f(1,0,-1) = (-1,0,1)$ è evidente che $(1,0,-1)$ è autovettore relativo.
Dato che però $\lambda = -1$ ha molteplicità 2, è possibile che ce ne siano altri, quindi risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - (-1)I$.
Il sistema si riduce immediatamente all'unica equazione $x + y + z = 0$ che ha ∞^2 soluzioni, tra cui una è, come già notato $(1,0,-1)$ e un'altra linearmente indipendente è per esempio $(1,-1,0)$.

Abbiamo quindi la base di autovettori $(2,1,0)$, $(1,0,-1)$, $(1,-1,0)$

43. a. L'applicazione è completamente definita perché i tre vettori $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,i)$ formano una base per $\mathbb{C}^3$.
b. Moltiplicando per $-i$, l'ultima relazione diventa immediatamente $f(0,0,1) = (-i,0,0)$, quindi si scrive subito la matrice associata. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
c. Il polinomio caratteristico è $-x^3 - i$, quindi gli autovalori sono le radici terze di $-i$ che sono distinte. Avendo tre autovalori distinti, f è diagonalizzabile per il criterio fondamentale. Le radici sono i , $(\sqrt{3}-i)/2$, $(-\sqrt{3}-i)/2$. Questi sono gli autovalori. Determiniamo ad esempio un autovettore relativo all'autovalore i. Riduciamo la matrice $A - iI$:

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & -i \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \underset{R_1 \to iR_1}{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \underset{R_2 \to R_2 - R_1}{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_2 - iR_1}{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un autovettore è una soluzione del sistema ridotto, per esempio $(-1,i,1)$.

44. Un'applicazione f che soddisfi i criteri dati è sempre diagonalizzabile dato che ha due autovalori distinti con molteplicità 1.
Sia v_1, v_3 una base di $\mathbb{R}^2$ costituita da due autovettori relativi rispettivamente agli autovalori 1 e 3. Allora $(1,3)$ è loro combinazione lineare, anzi, moltiplicando i vettori della base per uno scalare possiamo supporre che sia loro somma:
$\underline{(1,3) = v_1 + v_3}$ con $v_1 \in V_1$ e $v_3 \in V_3$.
Quindi $f(1,3) = \underline{(2,0)}$, ma $f(1,3) = f(v_1) + f(v_3) = \underline{1 \cdot v_1 + 3 \cdot v_3}$ da cui, mettendo insieme le relazioni sottolineate: $\begin{cases} v_1 + v_3 & = & (1,3) \\ v_1 + 3v_3 & = & (2,0) \end{cases}$ Si trova subito: $v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$ $v_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$
L'applicazione sarà perciò definita come: $f\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$ $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.
Per come è stata costruita, è anche chiaro che f è unica.

45. La matrice A ha autovalori $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -1$. Avendo due autovalori di molteplicità 1 è diagonalizzabile.

Per $\lambda = i$ un autovettore è $(1,0)$ Per $\lambda = -1$ un autovettore è $(4,-1)$

Quindi la diagonalizzazione di A è $P^{-1}AP = D$ con:

$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Inoltre $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P$

Si ha $A = PDP^{-1}$ da cui $A^{97} = PD^{97}P^{-1}$. Si ha immediatamente: $D^{97} = \begin{pmatrix} i^{97} & 0 \\ 0 & -1^{97} \end{pmatrix}$

Dato che $i^{97} = i^{96}i = i$ e $(-1)^{97} = -1$, allora $D^{97} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Dato che $D^{97} = D$, anche $A^{97} = A$

51. Associamo nei tre casi la matrice a un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

a. Il polinomio caratteristico è $x^2 - 3x + 4$ e ha le radici 4 e -1.
Gli autovalori sono reali e hanno molteplicità 1, quindi A è diagonalizzabile sia come matrice reale che come matrice complessa. Cerchiamo una base di autovettori:

$\boxed{\lambda = 4}$ Il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ha le soluzioni (y, y). Un autovettore è $(1,1)$.

$\boxed{\lambda = -1}$ Il sistema omogeneo associato alla matrice $A + I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ha le soluzioni $(3t, -2t)$. Un autovettore è $(3,-2)$.

Una base di autovettori è quindi per esempio $(1,1), (3,-2)$.

Per P basta prendere la matrice delle coordinate degli autovettori trovati, per D la matrice diagonale degli autovalori nello stesso ordine. $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Si ha: $P^{-1}AP = D$, cioè $A = PDP^{-1}$ e anche $A^{99} = PD^{99}P^{-1}$.

La matrice P è già stata determinata. L'inversa di P si calcola immediatamente e si ha $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}$. Inoltre $D^{99} = \begin{pmatrix} 4^{99} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pertanto:

$$A^{99} = PD^{99}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4^{99} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^{99} + 3 & 3 \cdot 4^{99} - 3 \\ 2 \cdot 4^{99} - 2 & 3 \cdot 4^{99} + 2 \end{pmatrix}$$

b. Il polinomio caratteristico è $P(x) = x^2$
L'unico autovalore è quindi 0 con molteplicità 2. L'autospazio si ricava risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 0I = A$. Dato che questo sistema ha evidentemente ∞^1 soluzioni, allora (V_0) ha dimensione 1 ed è diversa dalla molteplicità, quindi non esiste base di autovettori e A non è diagonalizzabile né come matrice reale, né come matrice complessa.

c. Il polinomio caratteristico è $x^2 - 2x + 2$ e ha le radici $\lambda = 1 \pm i$ entrambe con molteplicità 1, quindi A non è diagonalizzabile come matrice reale, ma lo è come matrice complessa, dato che ha due autovalori distinti.

$\boxed{\lambda = 1 + i}$ Il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - (1+i)I$ ha tra le soluzioni $(i, 1)$. Questo è una autovettore.

$\boxed{\lambda = 1 - i}$ L'autovalore è il coniugato del precedente, un autovettore è il coniugato del precedente, $(-i, 1)$.

Una base di autovettori è quindi $(i,1), (-i,1)$.

Per scrivere la matrice P basta mettere in colonna le coordinate dei vettori mentre D è la matrice che ha nella diagonale gli autovalori nell'ordine corrispondente. $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$

Per calcolare A^{99} scriviamo $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Dopo aver calcolato P^{-1} si scrive:

$$A^{99} = PD^{99}P^{-1} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+i)^{99} & 0 \\ 0 & (1-i)^{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo $(1+i)^{99} = \left(\sqrt{2}e^{\pi i/4}\right)^{99} = \sqrt{2}\,2^{48}e^{3\pi i/4} = \sqrt{2}\,2^{48}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{49}\,(-1+i)$

Analogamente (è il coniugato) $(1-i)^{99} = 2^{49}\,(-1-i)$. Pertanto:

$$A^{99} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} 2^{49} \begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = 2^{48} \begin{pmatrix} -1-i & -1+i \\ -1+i & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= 2^{48} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 2^{49} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

52. a. La matrice associata è quella dei coefficienti delle tre forme lineari che definiscono f.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che il determinante di A è diverso da zero, quindi $\varrho(A) = 3$, per cui $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 3$ e $\dim(\ker(f) = 0$. Quindi $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$ e l'unica sua base è vuota.

Inoltre $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}^3$ e una sua base è per esempio la canonica.

b. $$\det \begin{pmatrix} 5-x & 2 & -3 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 2 & 2 & -x \end{pmatrix} = (-1-x) \det \begin{pmatrix} 5-x & -3 \\ 2 & -x \end{pmatrix} = (-1-x)(x^2 - 5x + 6)$$

Gli autovalori sono quindi: $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$ tutti con molteplicità 1. Quindi f è diagonalizzabile perché un'applicazione con tutti autovalori distinti lo è sempre.

Calcoliamo gli autovettori. Per ogni autovalore λ gli autovettori sono le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$ che saranno senz'altro ∞^1 in ciascuno dei tre casi:

$\lambda = -1$	$\lambda = 3$	$\lambda = 2$
$A + I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
Una soluzione è $(-2, 3, -2)$	Una soluzione è $(3, 0, 2)$	Una soluzione è $(1, 0, 1)$

Il criterio fondamentale di diagonalizzabilità ci assicura che (anche senza verificarne la lineare indipendenza) i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$ tutta fatta di autovettori: $(-2,3,-2)$, $(3,0,2)$, $(1,0,1)$

53. Esiste un'unica applicazione lineare che soddisfa le tre condizioni perché i tre vettori $(1,1,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, dato che la matrice delle coordinate dei tre vettori ha determinante diverso da zero (è triangolare inferiore a blocchi).

a. Per scrivere la matrice associata occorre conoscere $f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)$.
Esprimiamo quindi i vettori della base canonica come combinazione lineare dei vettori della base su cui è definita f. Le combinazioni sono in questo caso evidenti:

Si ha: $(1,0,0) = (1,1,1) - (0,1,1)$ quindi:
- $f(1,0,0) = f(1,1,1) - f(0,1,1) = (0,1,0) - (0,2,2) = \underline{(0,-1,-2)}$
- $f(0,1,0) = \underline{(0,0,0)}$ (già noto)

Si ha: $(0,0,1) = (0,1,1) - (0,1,0)$ quindi:
- $f(0,0,1) = f(0,1,1) - f(0,1,0) = (0,2,2) - (0,0,0) = \underline{(0,2,2)}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Da qui la matrice.

b. Calcoliamo gli autovalori: $\det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 \\ -1 & -x & 2 \\ -2 & 0 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)x^2$

Quindi 0 è autovalore di molteplicità 2, ma A ha caratteristica 2, dato che le due ultime righe sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(V_0) = \dim(\ker(f)) = 1$, pertanto f non è diagonalizzabile.

54. a. Perché $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$, dato che la matrice delle coordinate dei tre vettori ha determinante diverso da zero (è triangolare superiore).

b. Per questo occorre conoscere la matrice associata A. Calcoliamo subito:
- $f(1,0,0) = \underline{(1,0,-1)}$ (dalla definizione)
- $f(0,1,0) = f(1,1,0) - f(1,0,0) = (3,3,0) - (1,0,-1) = \underline{(2,3,1)}$
- $f(0,0,1) = f(1,1,1) - f(1,1,0) = (1,3,2) - (3,3,0) = \underline{(-2,0,2)}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Possiamo ora scrivere la matrice A e si ha: $f(x,y,z) = (x + 2y - 2z\ ,\ 3y\ ,\ -x + y + 2z)$.

c. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & 2 & -2 \\ 0 & \underline{3-x} & 0 \\ -1 & 1 & 2-x \end{pmatrix} = (3-x)\det\begin{pmatrix} 1-x & -2 \\ -1 & 2-x \end{pmatrix} = (3-x)(x^2-3x)$$

Gli autovalori sono quindi: $\lambda = 0$ con molteplicità 1 ; $\lambda = 3$ con molteplicità 2

Un autovettore per $\lambda = 0$ si trova risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice che ha ∞^1 soluzioni e si trova $(2, 0, 1)$.

Per $\lambda = 3$ l'autovettore $(1, 1, 0)$ è evidente dalla definizione dell'applicazione, dato che $f(1, 1, 0) = (3, 3, 0)$, ma, avendo $\lambda = 3$ molteplicità 2, è possibile che ce ne siano altri, quindi risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 3I$. Il sistema si riduce immediatamente all'unica equazione $-x+y-z = 0$ che ha ∞^2 soluzioni, tra cui una è, come già notato $(1, 1, 0)$ e un'altra linearmente indipendente è per esempio $(1, 0, -1)$.

Abbiamo quindi la base di autovettori $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, -1)$

55. a. La matrice è formata coi coefficienti delle forme lineari che definiscono f.
Per trovare $\ker f$ risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice, riducendola:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - (1/3)R_1 \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le soluzioni sono ∞^1 e sono $(z, 0, z)$ al variare di $z \in \mathbb{R}$.

Il nucleo ha perciò dimensione 1 e una base per $\ker f$ è per esempio : $(1, 0, 1)$.

L'immagine è generata dai vettori che hanno per coordinate le colonne della matrice, quindi $(3, 0, 1), (2, 2, 2), (-3, 0, -1)$. Dato che $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker f) = 2$, occorre scartarne uno. Scartiamo il terzo che è multiplo del primo.
Una base per $\operatorname{Im} f$ è quindi per esempio : $(3, 0, 1), (2, 2, 2)$.

b. Si ha: $\det\begin{pmatrix} 3-x & 2 & -3 \\ 0 & \underline{2-x} & 0 \\ 1 & 2 & -1-x \end{pmatrix} = (2-x)\det\begin{pmatrix} 3-x & -3 \\ 1 & -1-x \end{pmatrix} = (2-x)(x^2-2x)$.

Quindi gli autovalori sono: $\boxed{\lambda = 0}$ con molteplicità 1 ; $\boxed{\lambda = 2}$ con molteplicità 2.

- $\boxed{\lambda = 0}$ L'autovalore 0, avendo molteplicità 1 non crea problemi : $\dim(V_0) = 1$.
- $\boxed{\lambda = 2}$ La dimensione di V_2 è data dal numero di soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$, che ha evidentemente ∞^2 soluzioni, quindi $\dim(V_2) = 2$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

È ora chiaro che f è diagonalizzabile, dato che soddisfa il criterio di diagonalizzabilità.

c. Determiniamo una base per ciascun autospazio.

Com'è noto, se 0 è autovalore, allora $V_0 = \ker f$, una base per V_0 è quindi $(1, 0, 1)$.

Una base per V_2 si ottiene risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$ che si riduce alla sola equazione $x + 2y - 3z = 0$
Due soluzioni linearmente indipendenti sono: $(3, 0, 1)$, $(2, -1, 0)$.
Mettendo insieme i tre vettori, il criterio fondamentale di diagonalizzabilità ci assicura che (anche senza verificarne la lineare indipendenza) i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$ tutta fatta di autovettori: $\mathcal{B} : (1, 0, 1), (3, 0, 1), (2, -1, 0)$.

d. Come P possiamo prendere la matrice delle coordinate dei tre vettori della base di autovettori. D è la matrice diagonale degli autovalori, nell'ordine corrispondente.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

56. Per definire completamente f occorre conoscere le immagini dei vettori di una base di $\mathbb{R}^3$. Sappiamo già dalle condizioni che $f(0, 1, 1) = (2, 0, 4)$ e $f(1, 0, 2) = (0, 0, 0)$, quindi occorre un terzo vettore v in modo che $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$, v sia base per $\mathbb{R}^3$, e per questo basta che i vettori siano linearmente indipendenti (dato che sono tre vettori). Scegliamo per esempio $v = (0, 0, 1)$. I tre vettori sono linearmente indipendenti perché la matrice delle coordinate dei tre vettori ha determinante diverso da zero. Affinché -3 sia autovalore basta porre $f(0, 0, 1) = (0, 0, -3)$. In questo modo l'applicazione è completamente definita dalle tre relazioni

$f(0,1,1) \ = \ (2,0,4) \qquad f(1,0,2) = (0,0,0) \qquad f(0,0,1) = -(0,0,-3),$

Per vedere se f è diagonalizzabile occorre innanzitutto scriverne la matrice associata e per questo basta calcolare:

$f(0,0,1) = (0,0,-3)$ è stato appena definito
$f(0,1,0) = f(0,1,1) - f(0,0,1) = (2,0,4) - (0,0,-3) = (2,0,7)$
$f(1,0,0) = f(1,0,2) - 2f(0,0,1) = (0,0,0) - (0,0,-6) = (0,0,6)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è imediato ed è $(-3-x)(x^2)$

Il secondo autovalore è $\lambda = 0$ con molteplicità 2. L'autospazio relativo è $\ker(f)$, ma, dato che la matrice ha caratteristica 2 (il minore 2×2 inquadrato è non nullo), allora $\dim(\ker(f)) = 3-2 = 1$, quindi f non è diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

57. a. Basta risolvere il sistema omogeneo associato ad A:

$$\begin{cases} 2x & = 0 \\ -3x & = 0 \\ 2x+y+2z-t & = 0 \\ 2x+y+t & = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x & = 0 \\ y+2z-t & = 0 \\ y+t & = 0 \end{cases} \quad E_2 \to E_2 - E_3 \begin{cases} x & = 0 \\ 2z-2t & = 0 \\ y+t & = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi ∞^1 e sono $(0\ ,\ -t\ ,\ t\ ,\ t)$.
I vettori del nucleo sono pertanto i multipli di $(0,-1,1,1)$ che ne costituisce una base.

b. Si ha: $\qquad \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\ker(f)) = 3$
Un sistema di generatori per l'immagine si può ricavare dalle colonne di A ed è costituito dai seguenti quattro vettori:

$(2,-3,2,2)\ ,\ (0,0,1,1)\ ,\ (0,0,2,0)\ ,\ (0,0,-1,1)$

Dato che $\mathrm{Im}\,(f)$ ha dimensione 3, occore scartarne uno, per esempio $(0,0,-1,1)$ (differenza tra il secondo e il terzo). Quindi una base per $\mathrm{Im}\,(f)$ è $(2,-3,2,2)\ ,\ (0,0,1,1)\ ,\ (0,0,2,0)$, vettori che, come è possibile verificare, sono linearmente indipendenti.

c. Vediamo se esistono $a,b,c \in \mathbb{R}$ tali che $a(2,-3,2,2) + b(0,0,1,1) + c(0,0,2,0) = (1,0,0,0)$, cioè tali che abbia soluzioni il sistema lineare 4×3 associato alla matrice seguente

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Evidentemente il sistema non ha soluzioni perché le prime due equazioni sono $2a = 1$ e $-3a = 0$.
Quindi $v_1 \notin \mathrm{Im}\,(f)$

Analogamente vediamo se ha soluzioni il sistema lineare associato alla matrice seguente

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Eliminando le prima equazione proporzionale alla seconda si ottiene un sistema 3×3. La sua matrice dei coefficienti ha determinante diverso da 0 e il sistema ha una soluzione.
Quindi $v_4 \in \mathrm{Im}\,(f)$

d. I vettori dello spazio W sono $(0,0,a,b)$. Calcoliamo $f(0,0,a,b)$: Si ottiene $(0,0,2a-b,b)$. Quindi è autovettore se e solo se sono proporzionali cioè se $\dfrac{a}{2a-b} = \dfrac{b}{b}$, quindi $ab = 2ab - b^2$, cioè $a(a-b) = 0$. Gli autovettori sono per $a = 0 \quad (0,0,0,1)$ e per $a = b \quad (0,0,1,1)$.

e. $\det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -x & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2-x & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (2-x)(-x)(2-x)(1-x)$ Gli autovalori sono quindi:

$\lambda_1 = 2$ molteplicità: 2 $\quad 1 \le \dim(V_2) \le 2 \quad \Rightarrow \quad \dim(V_2) = 1,2$
$\lambda_2 = 0$ molteplicità: 1 $\quad 1 \le \dim(V_0) \le 1 \quad \Rightarrow \quad \dim(V_0) = 1$
$\lambda_3 = 1$ molteplicità: 1 $\quad 1 \le \dim(V_1) \le 1 \quad \Rightarrow \quad \dim(V_1) = 1$

Il criterio di diagonalizzabilità è verificato per $\lambda_2 = 0$ e per $\lambda_3 = 1$. Per dimostrare che f è diagonalizzabile occorre verificare che $\dim(V_2) = 2$.

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ Riduciamo la matrice $A - 2I$ per calcolare le soluzioni del sistema omogeneo associato.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Eliminiamo R_1 e R_4 $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $R_2 \to R_2 + \frac{2}{3}R_1$ $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Le soluzioni sono ∞^2 e sono $(2t, -3t, z, t)$ che si scrivono anche come: $t(2, -3, 0, 1) + z(0, 0, 1, 0)$, quindi i due vettori $(2, -3, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$ costituiscono una base per V_2 che ha dimensione 2.

Possiamo ora concludere che f è diagonalizzabile.

$\boxed{\lambda_2 = 0}$ Una base per V_0 è già stata trovata, dato che $V_0 = \ker(f)$. La base è $(0, -1, 1, 1)$.

$\boxed{\lambda_3 = 1}$ Occorrono le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} R_2 \to R_2 + 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2R_1 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_4 \to R_4 + R_2 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le soluzioni sono ora evidenti e sono $(0, 0, t, t)$. Una base per V_1 è quindi $(0, 0, 1, 1)$.
Una base di autovettori è pertanto: $(2, -3, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, -1, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$

f. P e D si ricavano immediatamente e sono:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g. Il vettore $(0, 0, 0, 1)$ è differenza di autovettori, cioè $(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1) - (0, 0, 1, 0)$, quindi:
$f^{2001}(0, 0, 0, 1) = f^{2001}(0, 0, 1, 1) - f^{2001}(0, 0, 1, 0)$
ma $f^{2001}(0, 0, 1, 1) = 1^{2001}(0, 0, 1, 1)$ $\quad f^{2001}(0, 0, 1, 0) = 2^{2001}(0, 0, 1, 0)$.
Quindi $f^{2001}(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1) - (0, 0, 2^{2001}, 0) = (0, 0, 1 - 2^{2001}, 1)$

58. La matrice A è diagonalizzabile perché è simmetrica. Per lavorare su A, associamo la matrice A a un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Non è necessario calcolare il polinomio caratteristico perché evidentemente A ha caratteristica 1, quindi $\det(A) = 0$ e 0 è autovalore. Inoltre V_0 è definito dall'equazione $x + 2y - z + t = 0$, quindi V_0 ha dimensione 3 (e pertanto 0 ha molteplicità 3). Una sua base è per esempio $(2, -1, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 1)$.
Per quanto riguarda l'altro autovettore, la matrice è simmetrica, ha tutte le righe proporzionali e le colonne identiche alle righe. Si vede quindi subito che ognuna delle righe o delle colonne (per esempio $(1, 2, -1, 1)$) è autovettore. Calcolando $f(1, 2, -1, 1)$ si ottiene $(7, 14, -7, 7)$, quindi l'autovalore è 7.
La matrice P si ottiene mettendo le coordinate dei vettori in colonna e la matrice D è la matrice diagonale che ha nella diagonale tutti gli autovalori nell'ordine corrispondente.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

59. a. Conviene associare A a un'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$. Il polinomio caratteristico è $(x - i)^2(x + i)$ e ha le radici $\lambda = i$ e $\lambda = -i$ con molteplicità rispettivamente 2 e 1.

- $\boxed{\lambda = i}$ Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - iI$ si trova $V_i = L\{(1, 1 - i, 0), (0, 1, 1)\}$.
- $\boxed{\lambda = -i}$ Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A + iI$ si trova: $V_{-i} = L\{(1, 1 + i, 0)\}$

Quindi f è diagonalizzabile, dato che, per matrici complesse, il criterio di diagonalizzabilità si riduce alla condizione che per ogni λ si abbia $\dim(V_\lambda) = \text{molteplicità}(\lambda)$

Una base di autovettori è quindi $(1, 1 - i, 0), (0, 1, 1), (1, 1 + i, 0)$.

La matrice P si ottiene mettendo le coordinate dei vettori in colonna e la matrice D è la matrice diagonale che ha nella diagonale tutti gli autovalori nell'ordine corrispondente.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 - i & 1 & 1 + i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

60. a. Si ha: $f(1, 0, 0) = \underline{(-1, k, 3)}$
Scriviamo: $(0, 1, 0) = a(1, 0, 0) + b(0, 2, -1) + c(0, 1, 1)$ da cui:

$\{0 = a \;;\; 1 = 2b + c \;;\; 0 = -b + c\}$ $\quad a = 0$; $b = 1/3$; $c = 1/3$ quindi:
$f(0,1,0) = (1/3)f(0,2,-1) + (1/3)f(0,1,1) = \underline{(0,1,3)}$.
Analogamente: $(0,0,1) = a(1,0,0) + b(0,2,-1) + c(0,1,1)$ da cui:
$\{0 = a \;;\; 0 = 2b + c \;;\; 1 = -b + c\}$ $\quad a = 0$; $b = -1/3$; $c = 2/3$ quindi:
$f(0,1,0) = (-1/3)f(0,2,-1) + (2/3)f(0,1,1) = \underline{(0,2,2)}$.
La matrice è pertanto quella a lato

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

b. Il polinomio caratteristico è $(-1 - x)(x^2 - 3x - 4)$.
Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = 4$ con molteplicità 1 e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità 2.
Per sapere se è diagonalizzabile occorre controllare se $\dim(V_{-1}) = 2$. Esaminiamo la matrice $A + I$. Si vede subito che ha caratteristica 1 solo per $k = 2$, quindi solo per questo valore $\dim(V_{-1}) = 2$ e f è diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

61. a. Si ha: $f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = \vec{x}_1 \wedge \vec{w} + \vec{x}_2 \wedge \vec{w}$ $\qquad f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \wedge \vec{w}$
e coincidono per la distributività del prodotto vettore.
Analogamente $\quad af(\vec{x}) = a(\vec{x} \wedge \vec{w}) \qquad f(a\vec{x}) = (a\vec{x}) \wedge \vec{w} \qquad$ quindi coincidono.
Come è noto $\vec{x} \wedge \vec{w} = \vec{0}$ se e solo se $\vec{x}$ è multiplo di $\vec{w}$, quindi $\ker(f) = L\{\vec{w}\}$.
Dato che il nucleo ha dimensione 1, l'immagine ha dimendsione 2, quindi per averne una base basta trovarne due vettori linearmente indipendenti. Per esempio $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} \wedge \vec{w} = (0,3,2)$ e $f(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath} \wedge \vec{w} = (-3,0,-1)$.

b. Identifichiamo V_3 con $\mathbb{R}^3$ nel modo standard. Per calcolare la matrice associata occorrono $f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath}), f(\vec{k})$. Abbiamo già calcolato $f(\vec{\imath})$ e $f(\vec{\jmath})$. Si ha poi $f(\vec{k}) = (-2,1,0)$.
Quindi si ricava la matrice associata che è antisimmetrica. Il polinomio caratteristico è $-x^3 - 12x$. Dato che c'è un solo autovalore reale e dato che V_3 è un $\mathbb{R}$-spazio, allora f non è diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

62. Affinché esista un'unica f lineare occorre innanzitutto che $(1,2,0,0), (0,0,1,1), (0,1,0,0), v$ sia una base per $\mathbb{R}^4$ e per questo basta che i vettori siano linearmente indipendenti (dato che sono quattro vettori). Scegliamo perciò un vettore v, che può essere scelto tra quelli della base canonica, in modo che i quattro vettori siano linearmente indipendenti. Per esempio $v = (0,0,0,1)$. I quattro vettori sono linearmente indipendenti perché , dato che la matrice delle coordinate dei quattro vettori ha determinante diverso da zero.
Affinché -2 sia autovalore basta porre $f(v) = -2v$. In questo modo l'applicazione è completamente definita.

Per vedere se f è diagonalizzabile occorre innanzitutto scriverne la matrice associata e per questo basta calcolare:
$f(0,1,0,0) = \underline{(1,2,0,0)}$ già noto
$f(0,0,0,1) = \underline{(0,0,0,-2)}$ è stato appena definito
$f(0,0,1,0) = \underline{f(0,0,1,1)} - f(0,0,0,1) = (1,0,0,0) - (0,0,0-2) = \underline{(1,0,0,2)}$
$f(1,0,0,0) = f(1,2,0,0) - 2f(0,1,0,0) = (3,6,0,0) - (2,4,0,0) = \underline{(1,2,0,0)}$

Quindi si ha la matrice associata. Calcoliamone il polinomio caratteristico usando il fatto che è una matrice triangolare superiore a blocchi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 2 & 2-x \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} -x & 0 \\ 2 & -2-x \end{pmatrix} = (x^2 - 3x)(x^2 + 2x)$$

I primi due autovalori sono quindi $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$ entrambi con molteplicità 1.
Il terzo autovalore è $\lambda_3 = 0$ con molteplicità 2. L'autospazio relativo è $\ker(f)$, ma, dato che la matrice ha caratteristica 3 (il minore 3×3 inquadrato è non nullo), allora $\dim(\ker(f)) = 4 - 3 = 1$, quindi f non è diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

63. Per lavorare sulle matrici, le associamo a un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

a. Evidentemente A ha caratteristica 1, quindi $\det(A) = 0$ e $\lambda_1 = 0$ è autovalore. L'autospazio relativo è definito dall'equazione $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$, quindi V_0 ha dimensione $n - 1$ (e pertanto 0 ha molteplicità almeno $n - 1$). Una sua base è per esempio

$(1,-1,0,\dots,0),(0,1,-1,\dots,0),\dots,(0,\dots 0,1,-1,0),(0,\dots,0,1,-1)$.
È anche chiaro che $(1,1,1,\dots,1)$ è autovettore dato che $f(1,1,1,\dots,1)=(n,n,n,\dots,n)$ e che quindi n è l'altro autovalore e ha molteplicità 1. In conclusione:
Il polinomio caratteristico è $\pm(\lambda-n)\lambda^{n-1}$ (col segno $\pm$ a seconda che n sia pari o dispari) e una base di autovettori è per esempio
$(1,-1,0,\dots,0),(0,1,-1,\dots,0),\dots,(0,\dots 0,1,-1,0),(0,\dots,0,1,-1),(1,1,1,\dots,1)$.

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

b. Dato che $B+I=A$ ha caratteristica 1 , allora $\lambda_1=-1$ è autovalore e come sopra ha molteplicità $n-1$. Analogamente $(1,1,1,\dots,1)$ è autovettore, ma stavolta l'autovalore è $\lambda_2=n-1$ con molteplicità 1.
L'autospazio relativo a $\lambda_1=-1$ è definito, come in A, dall'equazione $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ e ha quindi dimensione $n-1$. Una sua base è la stessa trovata per V_0 in A.
Analogamente $(1,1,1,\dots,1)$ è autovettore relativo a $\lambda_2=n-1$.
Una base di autovettori è per esempio la stessa determinata per A.
P è la stessa trovata per A, D è invece quella a lato.

$$D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n-1 \end{pmatrix}$$

64. Assoceremo ogni volta A e B a un'applicazione lineare $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tramite la base canonica.

A. Il polinomio caratteristico è $(x-1)(x^2-b^2)$. Gli autovalori sono $1,b,-b$. A seconda della possibilità che coincidano, si possono considerare quattro casi diversi:

a. $\boxed{b\neq 0,1,-1}$ I tre autovalori sono distinti quindi A è diagonalizzabile.

b. $\boxed{b=0}$ L'autovalore $\lambda=0$ ha molteplicità 2. Ma $\varrho(A-0I)=1$ *per ogni* a. e quindi $\dim(V_0)=3-\varrho(A-0)=2$. In conclusione, se $b=0$, A è diagonalizzabile per ogni a.

c. $\boxed{b=1}$ L'autovalore $\lambda=1$ ha molteplicità 2. Come si verifica subito, la caratteristica di $A-1I$ è 1 se $a=-1$ ed è 2 se $a\neq-1$. Quindi A è diagonalizzabile se $a=-1$ e non se $a\neq-1$.

d. $\boxed{b=-1}$ L'autovalore $\lambda=1$ ha molteplicità 2. Come si verifica subito, la caratteristica di $A+1I$ è 2 se $a=1$ ed è 2 se $a\neq 1$. Quindi A è diagonalizzabile se $a=1$ e non se $a\neq 1$.

B. Il polinomio caratteristico è $(x-1)(x-a)(x-b)$. Gli autovalori sono $1,a,b$. A seconda della possibilità che coincidano, si possono considerare cinque casi diversi (che, come vedremo, diventano poi sette):

a. $\boxed{a\neq 1,\ b\neq 1 \text{ e } a\neq b}$ I tre autovalori sono distinti e quindi B è diagonalizzabile.

b. $\boxed{a=1 \text{ e } b\neq 1}$ L'autovalore $\lambda=1$ ha molteplicità 2. Come si calcola subito, $V_1=L\{(0,1,0)\}$ e ha dimensione 1 per cui B non è diagonalizzabile, per ogni $b\neq 1$.

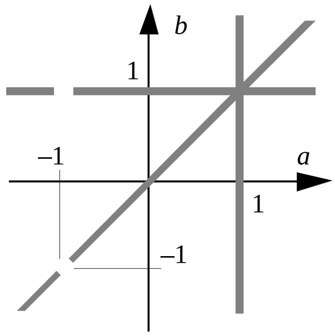
c. $\boxed{a=1 \text{ e } b=1}$ L'autovalore $\lambda=1$ ha molteplicità 3. Come sopra, però $V_1=L\{(0,1,0)\}$ e ha dimensione 1 per cui B non è diagonalizzabile.

d. $\boxed{b=1 \text{ e } a\neq 1}$ L'autovalore $\lambda=1$ ha molteplicità 2. Come si calcola subito, V_1 è definito dal sistema lineare $\{x+(a-1)y=0\ ;\ (a+1)z=0\}$. Occorre quindi distinguere altri due casi:

d1. $\boxed{a=-1 \text{ e } b=1}$ Lo spazio V_1 ha dimensione 2, quindi B è diagonalizzabile.

d2. $\boxed{a\neq 1,-1 \text{ e } b=1}$ Lo spazio V_1 ha dimensione 1, quindi B non è diagonalizzabile.

e. $\boxed{a=b}$ e $\boxed{a,b\neq 1}$ (caso già considerato al punto c.). Allora V_a è definito dal sistema $\{x=0\ ;\ (a+1)\,z=0\}$. Distinguiamo quindi altri due casi:



e1. $\boxed{a=-1 \text{ e } b=-1}$ Allora V_{-1} ha dimensione 2, quindi B è diagonalizzabile.

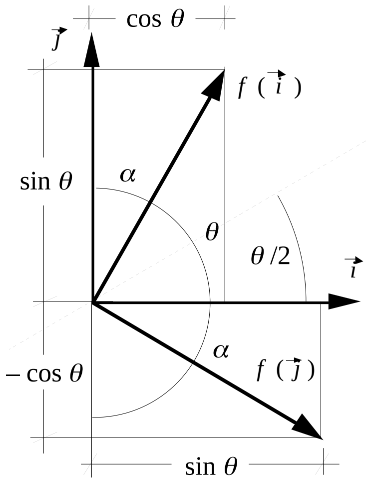
e2. $\boxed{a\neq -1 \text{ e } b=a}$ (ma sempre $\boxed{a\neq 1}$). Allora V_a ha dimensione 1, quindi B non è diagonalizzabile.

- La situazione può essere riassunta nello schema disegnato, nel quale le zone in grigio corrispondono alle coppie (a,b) per cui B non è diagonalizzabile.

65. a. Il polinomio caratteristico è $x^2-\cos^2\theta-\sin^2\theta=x^2-1$ e non dipende da θ. Dato che A ha due autovalori distinti, allora è sempre diagonalizzazbile.

b. Si ha:
$A-1I=\begin{pmatrix}\cos\theta-1 & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta-1\end{pmatrix}$. Il sistema omogeneo associato ha ∞^1 soluzioni. Una soluzione è $(\sin\theta\ ,\ 1-\cos\theta)$. Questo vettore genera V_1. Un'altro generatore (proporzionale al primo, anche se non in modo evidente) è $(1+\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$.
$A+1I=\begin{pmatrix}\cos\theta+1 & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta+1\end{pmatrix}$. Il sistema omogeneo associato ha ∞^1 soluzioni. Una soluzione è $(\sin\theta\ ,\ -1-\cos\theta)$. Questo vettore genera V_{-1}. Un'altro generatore (proporzionale al primo, anche se non in modo evidente) è $(\cos\theta-1\ ,\ \sin\theta)$.
Gli autovettori sono quelli dei due autospazi (escluso naturalmente il vettore nullo).

c. Come si vede dal disegno, il vettore $f(\vec{\imath}\,)$ forma angolo $\alpha=\pi/2-\theta$ con $\vec{\jmath}$ e ugualmente il vettore $f(\vec{\jmath}\,)$ forma angolo $\alpha=\pi/2-\theta$ con $\vec{\imath}$, quindi $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ sono stati riflessi attorno alla bisettrice dei vettori $\vec{\imath}$ e $f(\vec{\imath})$, cioè del vettore che forma un angolo di $\theta/2$ con $\vec{\imath}$. Di conseguenza gli autovettori relativi a $\lambda=1$ sono i vettori direzionali della retta r attorno a cui la f riflette. Un vettore direzionale per la bisettrice r si può trovare sommando $\vec{\imath}$ con $f(\vec{\imath}\,)$ (dato che hanno lo stesso modulo e cioè 1) ed è perciò $(1,0)+(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)=(1+\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$, che è, come abbiamo visto, autovettore per $\lambda=1$. Gli autovettori relativi a $\lambda=-1$ sono quelli ortogonali alla retta r, visto che in riflessione sono trasformati nel loro opposto. In effetti, come si verifica subito, gli autovettori relativi a $\lambda=-1$ sono ortogonali agli autovettori relativi a $\lambda=1$.



66. Identifichiamo M_{22} con $\mathbb{R}^4$ mediante l'appiattimento per righe e scriviamo la matrice associata a f, quindi calcoliamo $f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ etc.

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\1&1&0&-1\\0&0&-1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Si scrive così subito la matrice A associata a f tramite la base canonica. Il polinomio caratteristico è $x^2(x+1)(x-1)$.
Per trovare gli autospazi basta risolvere i sistemi omogenei associati alle matrici $A-I$, $A+I$, A e interpretare i risultati come elementi di una matrice 4×4 . Gli autospazi sono:
$V_0=L\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ $V_1=L\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ $V_{-1}=L\left\{\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$.
Le quattro matrici formano quindi una base di autovettori.