Spazi con prodotto scalare

01. Sia $W = L\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
   a. Dopo aver scritto una base ortonormale per W, determinare la proiezione ortogonale p del vettore $v = (1,2,0)$ su W.
   b. Verificare che $v - p$ è ortogonale a W e determinare la proiezione di v su $W^{\perp}$.

02. Dire perché la matrice A induce un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$ e determinare una base ortonormale per $\mathbb{R}^2$ dotato di questo prodotto scalare. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

03. Nello spazio vettoriale $C^\infty[1,2]$ dotato del prodotto scalare usuale (coll'integrale), verificare la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz per le due funzioni $f_1 = \dfrac{ax^2+b}{x}$ e $f_2 = \dfrac{1}{x}$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ e dire per quali a, b la diseguaglianza è uguaglianza o è massima.

04. Siano $V = L\{1,x\}, V_1 = L\{1,x,x^2\}$ sottospazi di $C^\infty([0,1])$ col prodotto scalare usuale.
   a. Determinare una base ortonormale per V e una per V_1 utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt.
   b. Determinare una base ortonormale per V_1 direttamente senza l'algoritmo di Gram-Schmidt.
   c. Proiettare la funzione $f(x) = x^2$ sul sottospazio V. Che relazione c'è tra $f(x)$ e la sua proiezione $p(x)$? Cosa rende minimo ?

05. Nello spazio vettoriale $C^\infty[1,2]$ dotato del prodotto scalare usuale.
   a. Calcolare una base ortonormale per il sottospazio $W = L\{1/x, x\}$.
   b. Calcolare la proiezione ortogonale $p(x)$ della funzione $f(x) = x^2$ su W.
   c. Dire cosa significa il fatto che $p(x)$ è il vettore di W con la minima distanza da $f(x)$.
   d. Sia $f(x) \in C^\infty[1,2]$ una funzione e $p(x)$ la sua proiezione su W, Dimostrare che, se almeno uno tra $\displaystyle\int_1^2 f(x)x\,dx$ e $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx$ è non nullo, allora $\displaystyle\int_1^2 f(x)p(x)dx > 0$.

Norme matriciali e condizionamento

10. Data la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ calcolare $\| A \|_2$ e $\mathrm{cond}_2(A)$

11. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ Calcolare $\| A \|_2$ e $\mathrm{cond}_2(A)$

12. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
   a. Usando il fatto che $P_A(x) = -(x-1)^2(x-7)$, calcolare $\| A \|_2, \| A \|_1$ e $\| A \|_\infty$ e confrontarle.
   b. Calcolare $\mathrm{cond}_2(A)$
   c. Siano $b = [1\ ,\ 1\ ,\ 1]^T$ e $b_1 = [1\ ,\ 1\ ,\ 5]^T$ e x e x_1 le soluzioni dei sistemi lineari $Ax = b$ e $Ax = b_1$. Senza calcolare x e x_1 dare una maggiorazione per $\dfrac{\| x - x_1 \|}{\| x \|}$.

13. È data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
   a. Determinare gli autovalori di A.
   b. Calcolare $\| A \|_2$ e $\mathrm{cond}_2(A)$.
   c. Dire quale tra le tre matrici $A + I\ ,\ A - I\ ,\ A - 2I$ è meglio condizionata.
   d. Siano $b = [1\ ,\ 0\ ,\ 1]^T$ e $b + db = b_1 = [1.01\ ,\ 0.01\ ,\ 1]^T$ e siano x e x_1 rispettivamente le soluzioni di $Au = b$ e di $Au = b_1$. Senza calcolare x e x_1, determinare una maggiorazione per il numero $\dfrac{\| x - x_1 \|_2}{\| x \|_2}$

14. È data la matrice A di cui sono noti:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
   - Gli autovalori della matrice $A \cdot A^T$ che sono (all'incirca)
     $0.0022\ ,\ 2.4175\ ,\ 18.8818\ ,\ 91.6986$
   - La soluzione del sistema $Ax = (1\ ,\ 4\ ,\ 4\ ,\ 4)^T$ che è $x_1 = (2/3\ ,\ -2/3\ ,\ -1\ ,\ 2)^T$

   Senza calcolarla, dare una stima per la soluzione di $Ax = (1.1\ ,\ 4\ ,\ 3.9\ ,\ 4)^T$

15. Data la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   a. Calcolare $\mathrm{cond}_2(A)$.
   b. La terna $x = [1, 1, 1]^T$ è soluzione del sistema lineare $Ax = [6\ 6\ 6]^T$ (verificarlo). Sia $x(\varepsilon)$ la soluzione del sistema lineare $Ax = [6 + \varepsilon\ 6 + \varepsilon\ 6 + \varepsilon]^T$; determinare una maggiorazione per $\| x - x(\varepsilon) \|_2$

16. Dati i sistemi lineari $Ax = b$ e $Ax = b_1$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b_1 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 2.9 \\ 1 \end{pmatrix}$
   a. Verificare che le soluzioni dei due sistemi lineari sono rispettivamente $x = (0\ ,\ 1\ ,\ 0)$ e $x_1 = (0.3\ ,\ 0.6\ ,\ 0.1)$
   b. Usare questi dati per dare una stima inferiore di $\mathrm{cond}_2(A)$
   c. Usare i dati anche per dare una stima inferiore di $\mathrm{cond}_1(A)$
   d. Verificare che $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e quindi calcolare esplicitamente $\mathrm{cond}_1(A)$.

17. Data la matrice simmetrica A dipendente dal parametro k $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Calcolare $\mathrm{cond}_2(A)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, nei casi in cui è possibile, discutendo per quali k è massima o minima.

18. Sia $A = \begin{pmatrix} 1+a & 1-a \\ 1-a & 1+a \end{pmatrix}$ Discutere $\| A \|_2$ e $\mathrm{cond}_2(A)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

19. È data la matrice reale 3×3 $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ i cui autovalori sono 0 e -6.

   Calcolare $\mathrm{cond}_2(A+\alpha I)$ per tutti gli α per cui ha senso e determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\mathrm{cond}_2(A+\alpha I)$ sia minimo.

20. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Calcolare $\mathrm{cond}_2(A)$ e $\mathrm{cond}_2(A + \alpha I)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui ha senso, specificando per quale α è minimo.

21. È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Calcolare $\mathrm{cond}_2(A + \alpha I)$ e $\mathrm{cond}_1(A + \alpha I)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e dire per quali α essi sono minimi.