301. a. Scriviamo $a(1,1,0)+b(0,1,1)+c(1,2,1)=(0,0,0)$. Si ottiene l'eguaglianza $(a+c\ ,\ a+b+2c\ ,\ b+c)=(0,0,0)$ da cui $\{a+c=0\ ,\ a+b+2c=0\ ,\ b+c=0\}$. Questo è un sistema lineare omogeneo 3×3 nelle incognite a,b,c che ha come matrice dei coefficienti quella sotto, che è anche la matrice delle coordinate dei tre vettori.

Mediante l'algoritmo gaussiano, si può constatare che il sistema ha ∞^1 soluzioni non banali $(-c,-c,c)$. Per esempio $a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-1$ da cui $1(1,1,0)+1(0,1,1)-1(1,2,1)=(0,0,0)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se prendiamo un'altra soluzione, per esempio $a=2\,,\ b=2\,,\ c=-2$ otteniamo un'altra combinazione.

b. Come nel precedente caso occorre studiare un sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti è la matrice delle coordinate dei tre vettori. Le soluzioni sono $(c,-2c,c)$. Per esempio per $a=1\,,\ b=-2\,,\ c=1$ si ha: $1(1,2,3)-2(4,5,6)+1(7,8,9)=(0,0,0)$. Un'altra combinazione lineare si ottiene per esempio raddoppiando i coefficienti.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

c. Sono linearmente dipendenti perché uno di essi è nullo. Una combinazione lineare è evidente ed è per esempio: $0(1,4,5)+0(2,3,-1)+1(0,0,0)=(0,0,0)$. Un'altra è quella con coefficienti $0\ ,\ 0\ ,\ 2$.

d. Sono linearmente dipendenti perché il terzo vettore è multiplo del primo per il coefficiente π, quindi una combinazione lineare è $\pi(1,\pi,0)+0(10^{45},\pi,2)-1(\pi,\pi^2,0)=(0,0,0)$. Un'altra è quella con coefficienti $2\pi\ ,\ 0\ ,\ -2$.

e. Sono linearmente dipendenti perché il secondo vettore è il primo moltiplicato per i, quindi una combinazione lineare è $i(1,i,0)-(i,-1,0)+0(0,0,i)=(0,0,0)$. Un'altra combinazione lineare è $(1,i,0)+i(i,-1,0)+0(0,0,i)=(0,0,0)$ ottenuta moltiplicando la prima per $-i$.

f. Come nel primo caso occorre studiare un sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti è la matrice delle coordinate dei tre vettori.

Le soluzioni sono $\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)c\,,\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)c\,,\ c\right)$, quindi per $c=1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(1,i,1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(i,1,-1)+(1,1,0)=(0,0,0)$$

Oppure (ponendo $c=1+i$) $\quad (1,i,1)+(i,1,-1)-(1+i)(1,1,0)=(0,0,0)$

302. a. Scriviamo $(1,2,0)=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(1,1,0)$ cioè $(1,2,0)=(a+c\ ,\ b+c\ ,\ 0)$. Da cui il sistema lineare 3×3 in (a,b,c):

$$\begin{cases} 1=a+c \\ 2=b+c \\ 0=0 \end{cases}$$

Il sistema ha le ∞^1 soluzioni $(1-c\ ,\ 2-c\ ,\ c)$, tra le quali:

$a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=0$ da cui: $(1,2,0)=1(1,0,0)+2(0,1,0)+0(1,1,0)$

Un'altra soluzione è

$a=0\ ,\ b=1\ ,\ c=1$ da cui: $(1,2,0)=0(1,0,0)+1(0,1,0)+1(1,1,0)$

302. b. Possiamo innanzitutto osservare che i tre sono vettori sono linearmente indipendenti in quanto la matrice formata dalle loro coordinate ha determinante diverso da 0. Tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ ne costituiscono una base. Pertanto $(1,1,1)$ può esprimersi in un solo modo come loro combinazione lineare.

Scriviamo $(1,1,1)=a(1,1,0)+b(0,1,1)+c(1,0,1)$. Si ottiene il sistema 3×3 in (a,b,c) che ha un'unica soluzione: $a=1/2\ ,\ b=1/2\ ,\ c=1/2$

$$\begin{cases} 1 = a+c \\ 1 = a+b \\ 1 = b+c \end{cases}$$

Quindi: $\quad (1,1,1)=1/2(1,1,0)+1/2(0,1,1)+1/2(1,0,1)$

303. Scriviamo $a(1,2,1)+b(1,0,1)+c(1,1,1)+d(0,1,2)=(0,0,0)$. Questo è un sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è formata dalle coordinate dei quattro vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \infty^1 \text{ soluzioni:} \\ (-c/2\ ,\ -c/2\ ,\ c\ ,\ 0) \end{matrix}$$

Per esempio per $c=-2$ si ha $(1,2,1)+(1,0,1)-2(1,1,1)+0(0,1,2)=(0,0,0)$.

Dall'eguaglianza si ricava subito che ciascuno dei primi tre è combinazione lineare dei rimanenti:

$(1,2,1) = -(1,0,1) + 2(1,1,1) + 0(0,1,2)$
$(1,0,1) = -(1,2,1) + 2(1,1,1) + 0(0,1,2)$
$(1,1,1) = 1/2(1,2,1) + 1/2(1,0,1) + 0(0,1,2)$
Ma $(0,1,2)$ non lo è perché se fosse $x(1,2,1) + y(1,0,1) + z(1,1,1) = (0,1,2)$, si ricaverebbe: $\{x+y+z=0 \quad 2x+z=1 \quad x+y+z=2\}$ e questo sistema 3×3 non ha soluzioni.

Altro modo: la matrice a lato ha caratteristica 3, ma l'unico minore 3×3 ricavabile dalle prime tre colonne ha determinante 0, per cui $(0,1,2)$ non è combinazione lineare dei rimanenti.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

304. a. Se fosse $a(1,0,0) + b(0,1,1) + c(0,0,1) = (0,0,0)$, allora si avrebbe: $(a\ ,\ b\ ,\ b+c) = (0,0,0)$ da cui $a = b = c = 0$.
Dato che sono tre vettori linearmente indipendenti nello spazio $\mathbb{R}^3$ che ha dimensione 3, costituiscono già base.

b. Si può procedere come nel caso precedente, oppure considerare la matrice delle coordinate dei vettori che ha determinante diverso da 0.
Come sopra, 3 vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ costituiscono già base.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. È linearmente indipendente perché è diverso da 0.
Per completarlo a base possiamo usare due vettori della base canonica.
Per esempio $(0,1,1), (1,0,0), (0,1,0)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ perché si tratta di tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ (basta guardare la matrice delle loro coordinate).

d. I *due* vettori sono linearmente indipendenti perché sono *due* e non proporzionali.
Una base di $\mathbb{C}^3$ è per esempio $(0,1,1), (0,7,i), (1,0,0)$ perché si tratta di tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^3$ (basta guardare la matrice delle loro coordinate).

e. I *due* vettori sono linearmente indipendenti perché sono *due* e non proporzionali.
Dato che sono due vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^2$ che ha dimensione 2, costituiscono già base.

f. Scriviamo $a\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si ha: $\begin{pmatrix} b+2c & 0 \\ a+c & a+2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

da cui il sistema lineare omogeneo a lato che ha la sola soluzione $a = b = c = 0$.

$$\begin{cases} b+2c=0 \\ a+c=0 \\ a+2b+c=0 \end{cases}$$

Per completare a base possiamo usare un vettore della base "canonica" di M_{22} per esempio $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. I quattro vettori sono linearmente indipendenti perché non è zero il determinante della matrice delle coordinate rispetto alla base "canonica" di M_{22} in cui ogni colonna è data da una delle quattro matrici 2×2 "appiattita" per righe.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

305. Sommando i primi due si ottiene $2u$, quindi una combinazione è per esempio

$$u = \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(u-v) + 0\cdot v$$

Un'altra possibilità è quella di sottrarre il terzo del primo: $u = 1(u+v) + 0(u-v) - 1\cdot v$.
Scriviamo in generale $u = a(u+v) + b(u-v) + cv$. Si ottiene $u = (a+b)u + (a-b+c)v$.
Ogni scelta di a, b, c tale che $a-b+c=0$ dà una combinazione lineare come quella richiesta.
Esistono pertanto infiniti modi .

306. I vettori sono linearmente dipendenti perché 4 vettori in uno spazio di dimensione 3 lo sono sempre.
Cerchiamo a, b, c, d non tutti nulli tali che $a(1,0,1)+b(1,1,2)+c(1,2,3)+d(-1,2,1) = (0,0,0)$.

Ne risulta il sistema omogeneo in (a,b,c,d) che ha A come matrice dei coefficienti. A è anche la matrice delle coordinate dei vettori.
Il sistema ha le ∞^2 soluzioni $(c+3d\ ,\ -2c-2d\ ,\ c\ ,\ d)$ con cui si possono scrivere tutte le relazioni lineari tra i 4 vettori.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema ha ∞^2 soluzioni perché la matrice ha caratteristica 2. Questo prova che lo spazio da essi generato ha dimensione 2. Quindi occorre scartare due vettori. Dato che è possibile ricavare minori non nulli di ordine 2 da ogni coppia di colonne della matrice, allora è possibile scartare due qualunque dei quattro vettori e i restanti due saranno sempre linearmente indipendenti.

307. a. Per ipotesi è possibile scrivere $au + bv + cw = 0$ con a, b, c non tutti nulli. Allora $c \neq 0$ (altrimenti si avrebbe $au + bv = 0$ con a, b non tutti nulli). Pertanto $w = (-a/c)u + (-b/c)v$.

b. Controesempio: $u \neq 0$ qualunque, $v = 2u$ e w linearmente indipendente con u. Chiaramente w non è combinazione lineare di u e v.

c. Se fosse $a(u-v) + b(u+v) + c(v+w) = 0$ allora $(a+b)u + (-a+b+c)v + cw = 0$ e dato che u, v, w sono linearmente indipendenti allora $(a+b) = (-a+b+c) = c = 0$, sistema lineare omogeneo che ha la sola soluzione $a = b = c = 0$.

d. Per ipotesi è possibile trovare a, b, c non tutti nulli tali che $au + bv + cw = 0$.
Cerchiamo ora x, y, z tali che $x(u-v) + y(u+v) + z(v+w) = 0$ uguaglianza che, riordinando, si può scrivere $(x+y)\,u + (-x+y+z)\,v + z\,w = 0$.
Possiamo quindi scegliere $\{x + y = a \quad , \quad -x + y + z = b \quad , \quad z = c\}$. Questo è un sistema lineare 3×3 in (x, y, z). Risolvendolo si trova $x = (a-b+c)/2$, $y = (a+b-c)/2$, $z = c$.
Dato che il sistema non è omogeneo (a, b, c sono non tutti nulli) è chiaro che anche x, y, z sono non tutti nulli e quindi abbiamo la combinazione lineare cercata.

e. Per ipotesi ogni vettore $z \in V$ si può scrivere come $z = au + bv + cw$; con conto simile al precedente si trova: $z = ((a-b+c)/2)(u-v) + ((a+b-c)/2)(u+v) + c(v+w)$.

308. Vediamo se è possibile trovare x e y non entrambi nulli tali che $x(au + bv) + y(cu + dv) = 0$, cioè $(xa + yc)u + (xb + yd)v = 0$.
Poiché u, v sono linearmente indipendenti, ciò è possibile se e solo se il sistema omogeneo $\begin{cases} xa + yc = 0 \\ xb + yd = 0 \end{cases}$ ha soluzioni non banali cioè se e solo se $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$. Quindi sono linearmente dipendenti se e solo se $ad - bc = 0$.

310. a. No: per esempio $(1, 0), (0, 1)$ appartengono a V, ma la loro somma no.

b. No: per esempio $(1, 0, 0)$ appartiene a V, ma $\sqrt{2}\,(1, 0, 0)$ no.

c. No, perché anche se V è definito da un sistema lineare, il sistema non è omogeneo. Per esempio $(0, 0, 0)$ non sta in V.

d. Sì: la dipendenza lineare di un qualunque insieme di vettori è sempre sottospazio.
Scartando $(0, 0, 0)$ i due che rimangono $(1, 1, 0), (0, 2, 1)$ sono ancora generatori per V ed essendo linearmente indipendenti, in quanto *due* e non proporzionali, formano una base.

e. No: due soli vettori non possono formare un sottospazio

f. Sì, è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo.
Le soluzioni sono ∞^2 e sono $(3z - t,\ z - t/3\ ,\ z\ ,\ t)$ e si può scrivere
$(3z - t,\ z - t/3\ ,\ z\ ,\ t) = z\,(3\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0) + t\,(-1\ ,\ -1/3\ ,\ 0\ ,\ 1)$.
I due vettori $(3\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0)$, $(-1\ ,\ -1/3\ ,\ 0\ ,\ 1)$ sono quindi generatori per V ed essendo linearmente indipendenti, in quanto *due* e non proporzionali, formano una base.

g. I vettori di V si possono scrivere come: $(a - b\ ,\ a + 2b\ ,\ 3b) = a(1, 1, 0) + b(-1, 2, 3)$ e quindi V è $L\{(1, 1, 0), (-1, 2, 3)\}$ che è *sempre* sottospazio.
I due vettori $(1, 1, 0)$, $(-1, 2, 3)$ sono generatori per V per definizione di $L\{\quad\}$ ed essendo linearmente indipendenti, in quanto *due* e non proporzionali, formano una base.

h. Sì: è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.
I vettori sono tutti multipli di $(i, 1)$ che quindi forma una base per V.

i. No: per esempio $(1, 1), (2, 4)$ stanno in V, ma la loro somma no.

j. No: Per esempio $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ stanno in V, ma la loro somma no.

311. Le verifiche del fatto che sono sottospazi sono di routine. A titolo di esempio proviamo che le matrici simmetriche formano sottospazio:

Se A e B sono simmetriche, allora $a_{ij} = a_{ji}$ e $b_{ij} = b_{ji}$ per ogni i, j. Quindi dato che l'elemento (i, j)-esimo di $A + B$ è $a_{ij} + b_{ij}$ si ha $a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$ e $A + B$ è simmetrica. Analogamente per λA. Esempi di basi sono:

a. $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

b. Si osservi che nelle matrici antisimmetriche la diagonale principale è nulla. Basi per i sottospazi sono per esempio:
$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

d. Diamo esempi di basi solo per le triangolari superiori (le altre sono analoghe)
$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

e. Si osservi che nelle matrici hermitiane la diagonale principale è reale. Come basi possiamo prendere:
$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&i&0\\-i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix}$ etc. (9 elementi)

312. I tre vettori sono linearmente dipendenti, dato che il determinante della matrice delle coordinate dei tre vettori è nullo. Per avere una base occorre scartarne qualcuno. Per esempio scartando il terzo si trovano $(1,1,0),(1,3,2)$ che, essendo linearmente indipendenti, in quanto *due* e non proporzionali, formano una base. Analogamente scartando il secondo si ha la base $(1,1,0),(0,1,1)$.

313. É possibile completare a base la successione dei due vettori perché essi sono linearmente indipendenti, in quanto *due* e non proporzionali. Per completare usando vettori della base canonica occorre sempre verificare che i 4 vettori siano linearmente indipendenti, cosa che si può fare scrivendo la matrice 4×4 delle loro coordinate e verificando che abbia determinante diverso da zero. Due modi corretti sono
$(1,0,-1,1),(2,0,1,-1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)$
$(1,0,-1,1),(2,0,1,-1),(0,1,0,0),(0,0,0,1)$
Due modi non leciti sono invece:
$(1,0,-1,1),(2,0,1,-1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)$
$(1,0,-1,1),(2,0,1,-1),(1,0,0,0),(0,0,1,0)$
perché i quattro vettori sono linearmente dipendenti.

314. a. Il sistema che definisce V_1 ha ∞^1 soluzioni che sono $((3/2)z\ ,\ -(3/2)z\ ,\ z)$ $(z\in\mathbb{R})$. Quindi $\dim(V_1)=1$ e una base per V_1 è per esempio $(3,-3,2)$.
Un sistema di generatori che non sia base è per esempio il seguente: $(3,-3,2),(6,-6,4)$.

b. Il sistema che definisce V_2 ha ∞^2 soluzioni che sono $(-2y+z\ ,\ y\ ,\ z)$ $(y,z\in\mathbb{R})$. Quindi $\dim(V_2)=2$ e una base per V_2 è per esempio $(2,-1,0),(1,0,1)$.
Un sistema di generatori che non sia base è per esempio il seguente: $(2,-1,0),(1,0,1),(1,1,3)$ ottenuto aggiungendo ai due vettori della base un qualunque altro vettore di V_2, per esempio il vettore $(1,1,3)=-(2,-1,0)+3(1,0,1)$.

315. I vettori di W sono $a(1,2,0,0)+b(0,1,0,1)=(a,2a+b,0,b)$ al variare di $a,b\in\mathbb{R}$. Per vedere se uno di essi sta in V_1, occorre vedere se soddisfa l'equazione omogenea che definisce V_1: $a+2(2a+b)+2(b)=0$ da cui $5a+4b=0$. Per esempio per $a=4$, $b=-5$ si ottiene il vettore $(4,3,0,-5)$ di W che sta anche in V_1.

316. V ha dimensione 3 perché 3 è la caratteristica della matrice delle coordinate dei quattro vettori che lo generano. Dato che il terzo vettore è somma dei primi due, è possibile estrarre una base per V eliminando il primo o il secondo o il terzo vettore, ma non il quarto.
$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&0&2&1\\0&1&1&0\\1&-2&-1&0\end{pmatrix}$$

317. $\mathcal{B}$ è base perché la matrice 3×3 delle coordinate dei vettori ha determinante diverso da zero. Scriviamo $v = a(1,1,0)+b(0,2,1)+c(0,0,2)$. Allora $(1,2,1) = (a, a+2b, b+2c)$ cioè: $(\,1 = a \quad , \quad 2 = a+2b \quad , \quad 1 = b+2c\,)$. Risolvendo il sistema lineare in (a,b,c) si trova: $a = 1 \quad b = 1/2 \quad c = 1/4$. Quindi $v_{\mathcal{B}}$ è la matrice a lato. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$
Esiste poi certamente un vettore di coordinate $[1\ 2\ 3]^T$ ed è ovviamente il vettore
$$v = 1\,(1,1,0) + 2\,(0,2,1) + 3\,(0,0,2) = (1,5,8).$$

318. Osserviamo innanzitutto che W ha dimensione 2 dato che la base fornita (è una base perché si tratta di *due* vettori non proporzionali) è formata da due vettori.

a. Per avere un'altra base possiamo per esempio prima sommare e poi sottrarre i due vettori; si ottengono i due vettori $(1,3,-1),(1,1,1)$ che formano una base di W (che chiamiamo $\mathcal{B}_1$,) perché son *due* vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione 2.

b. Per vedere se $v \in W$ si scrive: $(1,0,2) = a(1,2,0) + b(0,1,-1)$. Questo è un sistema lineare 3×2 che ha la soluzione $a = 1$, $b = -2$. Da qui si deduce che $v \in W$. Analogamente il sistema lineare $(0,1,2) = a(1,2,0) + b(0,1,-1)$ non ha soluzioni e quindi $w \notin W$.
Usando la soluzione del primo sistema lineare si può scrivere $(1,0,2) = 1(1,2,0) - 2(0,1,-1)$.
Quindi la matrice delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ è $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Per avere quella rispetto a $\mathcal{B}_1$ si risolve il sistema $(1,0,2) = a(1,3,-1) + b(1,1,1)$ che ha la soluzione $a = -1/2$, $b = 3/2$.
La matrice delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}_1$ è quindi $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

c. Sia $\mathcal{B}_2 : w_1\,,\, w_2$. Occorre che $(1,0,2) = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2$, quindi $w_1 = (1,0,2)$. Completiamo w_1 a base di W mediante un altro vettore <u>di W</u>, per esempio con $w_2 = (0,1,-1)$ e abbiamo la base richiesta.

319. a. Si ha: $\dim(W) = \varrho(A)$ dove A è la matrice delle coordinate dei quattro vettori che generano W. Per calcolare la caratteristica di A la riduciamo:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \leftrightarrow R_4 \\ R_3 \to R_3 + 3R_2 \\ R_4 \to R_4 + 2R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Eliminiamo R_4 identica a R_3: ora A è ridotta con 3 pivot. Quindi $\varrho(A) = 3$ e $\dim(W) = 3$.
Per avere una base occorre scartare uno dei quattro generatori.
Dato che la sottomatrice inquadrata ha determinante diverso da 0, è possibile scartare per esempio il terzo e i tre che restano sono linearmente indipendenti. Da qui si ricava la base:
$$\mathcal{B} : (1,2,2,0), (0,2,3,-1), (1,1,1,1)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Osserviamo che non è possibile scartare il quarto, perché nessuna delle sottomatrici costituite dalle prime tre colonne ha determinante diverso da 0.
I vettori di W sono le combinazioni lineari dei vettori di $\mathcal{B}$, cioè i vettori del tipo
$$a\,(1,2,2,0) + b\,(0,2,3,-1) + c\,(1,1,1,1) = (a+c\ ,\ 2a+2b+c\ ,\ 2a+3b+c\ ,\ -b+c)$$

b. Avendo ricavato una base per W, un modo di verificare le appartenenze a W è quello di controllare se è nullo il determinante della matrice 4×4 formata con le coordinate dei tre vettori che generano W e del vettore in questione. Scritte le due matrici, si verifica che:
$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = 0 \quad \det \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \neq 0 \text{ quindi:} \quad w_1 \in W \qquad w_2 \notin V$$

c. In a. abbiamo ricavato tutti i vettori di W: $(a+c, 2a+2b+c, 2a+3b+c, -b+c)$. Per avere le prime due componenti nulle occorre che $a+c = 0$ e $2a+2b+c = 0$. Risolviamo il sistema
$$\begin{cases} a+c = 0 \\ 2a+2b+c = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \infty^1 \text{ soluzioni: } (-c\ ,\ c/2\ ,\ c)$$
Per esempio ponendo $c = 2$, si ha $a = -2 \quad b = 1 \quad c = 2$ da cui il vettore $w = (0,0,1,1)$.

d. Per scrivere $w_{\mathcal{B}}$ usiamo i conti sopra da cui si vede che $w = -2\,(1,2,2,0) + 1\,(0,2,3,-1) + 2\,(1,1,1,1)$, da cui la matrice. $w_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

e. Avendo già una base di W, possiamo prendere due vettori da essa per completare il vettore linearmente indipendente w a base di W.
Per esempio prendiamo $(0,2,3,-1)$, $(1,1,1,1)$.
I tre vettori sono linearmente indipendenti, dato che la matrice a lato ha caratteristica 3 (minore inquadrato) e tre vettori linearmente indipendenti in W che ha dimensione 3 costituiscono una base.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

320. I tre vettori che generano V sono linearmente dipendenti perché la matrice a lato ha caratteristica 2 (basta ridurre con l'algoritmo di Gauss). Una sua base è per esempio quella costituita dai primi due vettori dato che sono *due* e linearmente indipendenti in quanto non proporzionali.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'appartenenza a V si verifica esaminando le due matrici 4×3 formate con le coordinate dei due vettori della base di V e dei vettori in questione (matrici in questo caso differenti solo per un elemento). Se ne calcola la caratteristica con l'algoritmo di Gauss e si vede che: $\varrho(A) = 3$ per v_1 e $\varrho(A) = 2$ per v_2, quindi $v_1 \notin V \qquad v_2 \in V$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

321. Dovrà essere $(1,2,1) = v_1 + v_2 + v_3$ e $(0,1,1) = v_2 + v_3$. Sottraendo le due eguaglianze si ha $v_1 = (1,1,0)$, da cui $v_2 + v_3 = (0,1,1)$.
Ogni base che soddisfi queste condizioni va bene, per esempio la base $(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)$.

322. a. I due vettori che generano V soddisfano entrambi l'equazione omogenea $x + y + z = t$ che definisce W, quindi ogni vettore di V (che è loro combinazione lineare) la soddisfa.

b. I tre vettori che generano W ne sono anche una base (sono linearmente indipendenti). Il determinante della matrice 4×4 formata da $(3,0,2,1)$ e dalle coordinate dei tre vettori di W è nullo, per cui $(3,0,2,1)$ sta in W. Analogamente è nullo il determinante della matrice 4×4 formata da $(2,2,3,1)$ e dalle coordinate dei tre vettori di W per cui anche $(2,2,3,1) \in W$. Questo basta ad assicurare che $V \subset W$.

c. Una base per V è per esempio $(1,-1,0,0), (0,2,-2,-1)$. Poi si procede esattamente come in b.

d. Per esempio basta osservare che $(0,-1,1,1) \in V$, ma $(0,-1,1,1) \notin W$ (dato che è diverso da 0 il determinante della matrice 4×4 formata da $(0,-1,1,1)$ e dalle coordinate dei tre vettori di W).

323. V è sottospazio perché, se $A_1, A_2 \in V$, allora $A_1 B = B A_1$ e $A_2 B = B A_2$ da cui facilmente $(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)B = B(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)$ cioè $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in V$.
Si pone $A = \begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}$ e si vede che $A \in V$ se e solo se $a = b + d$ e $2c = 3b$. Questo è un sistema lineare con ∞^2 soluzioni dipendenti da b e d. Due soluzioni linearmente indipendenti si trovano per esempio ponendo successivamente $b = 0$, $d = 1$, e $b = 1$, $d = 0$. In questo modo si trovano due matrici linearmente indipendenti: I , $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix}$ che quindi formano una base per V.
Sapendo ora che $\dim(V) = 2$ si vede subito che un'altra base è I, B^{-1} (due matrici linearmente indipendenti che stanno ovviamente in V).

324. V è sottospazio perché, se $A_1, A_2 \in V$, allora $A_1 B = D_1$ e $A_2 B = D_2$ (D_1 e D_2 diagonali) da cui $(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)B = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ che è sempre diagtheoremonale cioè $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in V$.
Procedendo come nel problema precedente, si trova $b = 2a$ e $c = -3d$. Una base per V è quindi per esempio $\begin{pmatrix} 1\,2 \\ 0\,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\,0 \\ -3\,1 \end{pmatrix}$.

331. a. Vera: è un segmento orientato.

b. Falsa: un vettore è *un insieme di segmenti orientati.*

c. Vera: ogni segmento orientato rappresenta un vettore geometrico.

332. a. Sì: è il prodotto dello scalare $|\,\vec{w}\,|$ per il vettore $\vec{v}$ e dà luogo a un vettore.

b. Sì: è il prodotto di due numeri reali ed è quindi uno scalare.
c. Sì, ma solo se $\vec{w} \neq \vec{0}$. È il prodotto dello scalare $1/\mid \vec{w} \mid$ per il vettore $\vec{v}$ e dà luogo a un vettore.
d. No: non ha senso dividere per un vettore.
e. Sì: è il prodotto dello scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$ per il vettore $\vec{v}$ e dà luogo a un vettore.
f. No: non si può sommare lo scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$ col il vettore $\vec{w}$.
g. Sì: è la somma di due scalari.
h. Sì: è il prodotto scalare di due vettori ed è uno scalare.
i. No: è ambiguo, dato che in generale $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ e $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ sono differenti.
j. Sì: ed è un vettore.
k. Sì: è il prodotto scalare del vettore $\vec{u}$ per il vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$ (il prodotto vettore va eseguito prima) e dà luogo allo scalare prodotto misto.
l. Sì: è la differenza di due vettori ed è un vettore.
m. Sì: è il prodotto scalare del vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$ per il vettore $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ed è quindi uno scalare.

333. Calcolo del primo:
$(1,2,0) \wedge (3,2,0) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to (0,0,-4)$. Poi:
$(0,0,-4) \wedge (1,1,1) \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to (4,-4,0)$
Calcolo del secondo:
Prima $(3,2,0) \wedge (1,1,1) \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to (2,-3,1)$. Poi:
$(1,2,0) \wedge (2,-3,1) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to (2,-1,-7)$

334. Nel primo caso no, perché $\vec{v} \cdot \vec{w} = \mid \vec{v} \mid \mid \vec{w} \mid \cos(\theta)$. Nel secondo sì, basta che l'angolo compreso tra i due vettori abbia coseno $-1/2$.

335. Si ha che $\mid \vec{u} \wedge \vec{v} \mid = 4$ e che $\vec{v}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sono ortogonali, da qui la tesi.

336. a. Applicando la distributività: $(\vec{u} + a\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} + a\vec{v} \wedge \vec{v}$, da cui la tesi, dato che $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
b. Applicando la distributività: $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{u} \wedge \vec{w}$.
Il secondo prodotto misto è nullo, perché ci sono due vettori uguali. Il primo è l'opposto del terzo perché sono due prodotti misti con gli stessi vettori, ma con due vettori scambiati. Da qui la tesi.

337. Per ipotesi si hanno le due eguaglianze:
$\dfrac{\vec{w}_1 \cdot \vec{u}}{\mid \vec{w}_1 \mid \cdot \mid \vec{u} \mid} = \dfrac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}}{\mid \vec{w}_2 \mid \cdot \mid \vec{u} \mid}$; $\dfrac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}}{\mid \vec{w}_1 \mid \cdot \mid \vec{v} \mid} = \dfrac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}}{\mid \vec{w}_2 \mid \cdot \mid \vec{u} \mid}$ da cui $\dfrac{\vec{w}_1 \cdot \vec{u}}{\mid \vec{w}_1 \mid} = \dfrac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}}{\mid \vec{w}_2 \mid}$ e $\dfrac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}}{\mid \vec{w}_1 \mid} = \dfrac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}}{\mid \vec{w}_2 \mid}$
Moltiplicando la prima eguaglianza per a, la seconda per b e sommando si ha la tesi.

341. Il vettore $(1, 2-1)$ ha modulo $\sqrt{6}$, i due vettori sono dunque: $\pm\dfrac{5}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$

342. Sia (x,y,z) il vettore cercato, allora $(x,y,z) \cdot (1,2,3) = 0$ e $(x,y,z) \cdot (1,1,-1) = 0$.
Da qui le due equazioni $(x + 2y + 3z = 0 \quad x + y - z = 0)$. Questo è un sistema lineare 2×3 in (x,y,z) che ha le ∞^1 soluzioni $(5z\ ,\ -4z\ ,\ z)$. Una soluzione è $(5,-4,1)$. Un vettore che soddisfa la richiesta è il suo normalizzato, un altro è l'opposto del normalizzato. Soluzioni del problema sono quindi: $\pm\dfrac{(5\ ,\ -4\ ,\ 1)}{\sqrt{42}}$.
Altro modo: Calcoliamo il prodotto vettore $(1,2,3) \wedge (1,1,-1) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to (-5,4,-1)$.
Si trova un vettore che soddisfa la richiesta, poi si procede come sopra.

343 a. I vettori di W sono le combinazioni lineari dei vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, quindi $\vec{v}$ sarà del tipo $\vec{v} = a(1,1,0) + b(2,-1,2) = (a + 2b\ ,\ a - b\ ,\ 2b)$. Ponendo $\vec{v} \cdot \vec{\jmath} = 0$ si ricava $a - b = 0$. Per esempio si può scegliere $a = 1 \quad b = 1$ da cui $\vec{v} = (3,0,2)$. Il vettore cercato sarà il normalizzato di $\vec{v}$ oppure il suo opposto. Per esempio $\quad \vec{v} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}\ ,\ 0\ ,\ \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

b. I vettori di W sono $(a+2b\ ,\ a-b\ ,\ 2b)$.
La condizione di ortogonalità a $\vec{v}_1$ è: $\quad (a+2b\ ,\ a-b\ ,\ 2b)\cdot(1,1,0)=0$
Cioè $\quad a+2b+a-b=0 \qquad 2a+b=0$. L'equazione lineare in a,b ha ∞^1 soluzioni tra cui per esempio $a=1$ e $b=-2$, da cui $\vec{w}=(-3,3,-4)$.
Vediamo se forma angolo acuto con $\vec{v}_2$: $\quad \vec{w}\cdot\vec{v}_2=(-3,3,-4)\cdot(2,-1,2)=-6-3-8=-17<0$, quindi l'angolo è ottuso. Per rimediare sarà sufficiente cambiare il verso a $\vec{w}$ e prendere $\vec{w}=(3,-3,4)$.
Perché abbia modulo 1 basterà normalizzarlo: $\vec{w}=\dfrac{(3,-3,4)}{\sqrt{34}}$

c. Il vettore $\vec{v}$ è stato ottenuto come combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$: $\vec{v}=1\cdot\vec{v}_1+1\cdot\vec{v}_2$. La normalizzazione ha cambiato la combinazione lineare in $\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\vec{v}_1+\dfrac{1}{\sqrt{13}}\vec{v}_2$.
Quindi la matrice delle coordinate di $\vec{v}$ è $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{13} \\ 1/\sqrt{13} \end{pmatrix}$
Il vettore $\vec{w}$ è stato ottenuto (dopo il cambiamento di verso) come combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, cioè $-1(1,1,0)+2(2,-1,2)$
Dopo la normalizzazione la combinazione lineare diventa $\vec{w}=-\dfrac{1}{\sqrt{34}}(1,1,0)+\dfrac{2}{\sqrt{34}}(2,-1,2)$
Quindi la matrice delle coordinate di $\vec{w}$ è $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{34} \\ 2/\sqrt{34} \end{pmatrix}$

344. a. Cerchiamo innanzitutto una base solo ortogonale:
Come primo vettore possiamo scegliere $\vec{v}=(1,1,0)$.
Il secondo vettore dovrà essere un vettore di W cioè del tipo
$$a\vec{v}+b\vec{w}=a(1,1,0)+b(0,-1,2)=(a\ ,\ a-b\ ,\ 2b)$$
Il secondo vettore dovrà poi essere ortogonale a $\vec{v}$, cioè dovrà essere
$$(a\ ,\ a-b\ ,\ 2b)\cdot(1,1,0)=0 \qquad a\cdot 1+(a-b)\cdot 1+2b\cdot 0=0 \qquad 2a-b=0$$
Per esempio per $a=1$ e $b=2$ otteniamo il vettore $(1,-1,4)$.
Una base ortogonale per W è quindi $(1,1,0),(1,-1,4)$.
Per averla ortonormale basterà normalizzare i due vettori: $\mathcal{B}:\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\ ,\ \dfrac{1}{\sqrt{18}}(1,-1,4)$

b. Occorre esprimere $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$: Si ha evidentemente $\vec{v}=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)+0\left(\dfrac{1}{\sqrt{18}}(1,-1,4)\right)$, quindi le coordinate di $\vec{v}$ sono $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$
Per quanto riguarda $\vec{w}$, scriviamo $(0,-1,2)=a\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)+b\left(\dfrac{1}{\sqrt{18}}(1,-1,4)\right)$ il che porta al sistema lineare 3×2 nelle incognite a,b:
$$\begin{cases} (1/\sqrt{2})\,a+(1/\sqrt{18})\,b= 0 \\ (1/\sqrt{2})\,a-(1/\sqrt{18})\,b=-1 \\ 0\cdot a+(4/\sqrt{18})\,b= 2 \end{cases}$$
Sapendo che il sistema ha una soluzione (le coordinate rispetto a una base sono uniche), si ricava subito dall'ultima equazione $b=\sqrt{18}/2$ e quindi dalla prima $a=-\sqrt{2}/2$
Quindi le coordinate di $\vec{w}$ sono $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{18}/2 \end{pmatrix}$

c. Occorre cercare un terzo vettore di V_3 ortogonale a entrambi. Il modo più semplice è di prendere $(1,1,0)\wedge(1,-1,4)=(4,-4,-2)$ o anche il suo multiplo $(2,-2,-1)$. Per averlo di modulo 1 lo si normalizza, quindi la base $\mathcal{B}_1$ è
$$\mathcal{B}_1:\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\ ,\ \frac{1}{\sqrt{18}}(1,-1,4)\ ,\ \frac{1}{3}(2,-2,-1)$$

345. Le coordinate dei due vettori si ricavano dalla figura e si vede che $\vec{v}=(1,0,2)$ e $\vec{w}=(-1,3,1)$.
a. Si ha: $|\,\vec{v}\,|=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{5} \qquad |\,\vec{w}\,|=\sqrt{(-1)^2+3^2+1^2}=\sqrt{11}$
$\vec{v}\cdot\vec{w}=1\cdot(-1)+0\cdot 3+2\cdot 1=1$, quindi: $\cos(\theta)=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\,\vec{v}\,|\,|\,\vec{w}\,|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}\,\sqrt{11}}=\dfrac{1}{\sqrt{55}}$
Dato che θ è tra 0 e π, allora $\theta=\arccos(1/\sqrt{55})$
Volendo proseguire il conto mediante calcolatrice:
$\cos(\theta)\simeq 0.135$, da cui $\theta\simeq 1.436$ (in radianti) o $\theta\simeq 82^\circ$ (in gradi).

b. I vettori di W sono tutte le combinazioni lineari dei vettori della base $\vec{v}$ e $\vec{w}$ cioè i vettori del tipo $a\vec{v} + b\vec{w} = a(1,0,2) + b(-1,3,1) = (a-b\ ,\ 3b\ ,\ 2a+b)$

Imponiamo l'ortogonalità con $\vec{k} = (0,0,1)$: $(a-b\ ,\ 3b\ ,\ 2a+b)\cdot(0,0,1) = 2a+b = 0$

Per esempio con $a = 1$ e $b = -2$ si ha il vettore $\vec{u} = (3,-6,0)$.

Va bene anche $\vec{u} = (1,-2,0)$ (multiplo).

c. I vettori di W sono tutti i vettori del tipo $(a-b\ ,\ 3b\ ,\ 2a+b)$. Occorre un vettore di W ortogonale a $\vec{u}$, quindi occorre che

$$(a-b\ ,\ 3b\ ,\ 2a+b)\cdot(1,-2,0) = a-b-6b = a-7b = 0$$

Per esempio per $a = 7$ e $b = 1$ si ottiene $(6,3,15)$ e la base ortogonale di W è $(1,-2,0), (6,3,15)$

d. Avendo già due vettori ortogonali di V_3 ricavati dal precedente conto occorre aggiungerne uno ortogonale a entrambi. Per esempio $(1,-2,0)\wedge(6,3,15)$:

$(1,-2,0)\wedge(6,3,15) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow (-30\ ,\ -15\ ,\ 15)$

Come terzo vettore della base va quindi bene il vettore trovato o anche un suo multiplo.

Se lo dividiamo per 15 troviamo: $(1,-2,0)\ ,\ (6,3,15)\ ,\ (-2,-1,1)$

346. a. Per verificare che sono linearmente dipendenti, basta verificare che la matrice delle coordinate dei tre vettori ha deteminante nullo. Per semplificare i conti possiamo usare anche la matrice a lato che ha le colonne proporzionali a quella delle coordinate. Ha determinante 0 e quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti e li possiamo pensare come segmenti orientati giacenti sullo stesso piano.

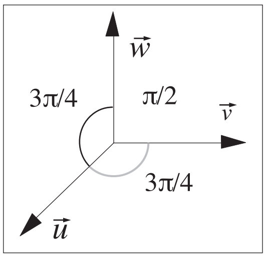
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Calcoliamo gli angoli. Basta il prodotto scalare perché hanno tutti e tre modulo 1.

Angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$: $\cos(\theta_1) = \dfrac{(-2,2,1)}{3}\cdot\dfrac{(1,2,-2)}{3} = 0 \quad \theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$

Tra $\vec{v}$ e $\vec{u}$: $\cos(\theta_2) = \dfrac{(-2,2,1)}{3}\cdot\dfrac{(1,-4,1)}{\sqrt{18}} = \dfrac{-9}{3\sqrt{18}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \quad \theta_2 = \dfrac{3\pi}{4}$

Tra $\vec{w}$ e $\vec{u}$: $\cos(\theta_3) = \dfrac{(1,2,-2)}{3}\cdot\dfrac{(1,-4,1)}{\sqrt{18}} = \dfrac{-9}{3\sqrt{18}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \quad \theta_3 = \dfrac{3\pi}{4}$



c. Dagli angoli e dal fatto che sono complanari, lo schizzo

347. Si deve avere: $(\vec{v}-(1,0,0))\cdot(1,1,2) = 0$ e $\vec{v}\cdot(0,1,0) = 0$ cioè: $\vec{v}\cdot(1,1,2) = (1,0,0)\cdot(1,1,2)$ e $\vec{v}\cdot(0,1,0) = 0$.
Ponendo $\vec{v} = (x,y,z)$ si ha il sistema lineare $\{x+y+2z = 1 \quad y = 0\}$ da cui si trovano i vettori $(1-2z\ ,\ 0\ ,\ z)$ $(z \in \mathbb{R})$.

348. I vettori sono $a(1,-1,1)$ e bisogna che $|\ (a,-a,a)-(1,0,0)\ | = \sqrt{(a-1)^2+a^2+a^2} = 3$, da cui $a = 2, -4/3$. I vettori cercati sono quindi $\vec{v} = 2(1,-1,1)$ e $\vec{v} = (-4/3)(1,-1,1)$

349. a. È sinistrorsa: si ottiene dalla base destrorsa $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ con un solo scambio.

b. È destrorsa, : si ottiene dalla base destrorsa $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ con una permutazione circolare verso sinistra.

c. È destrorsa, basta verificare che il segno del determinante della matrice delle coordinate dei tre vettori è positivo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

350. a. La proiezione è per definizione: $\dfrac{(1,2,1)\cdot(0,3,1)}{|\ (0,3,1)\ |^2}\ (0,3,1) = \dfrac{7}{10}\ (0,3,1)$.

b. Il vettore è del tipo $a(1,2,1)$.

La sua proiezione ortogonale su $(0,3,1)$ è $\dfrac{a(1,2,1)\cdot(0,3,1)}{|\ (0,3,1)\ |^2}\ (0,3,1) = \dfrac{7a}{10}\ (0,3,1)$ e ha modulo $\left|\dfrac{7a}{10}\right|\ |\,(0,3,1)\,| = \dfrac{7}{10}\ \sqrt{10}\,|\,a\,|$. Da cui $a = \pm\sqrt{10}/7$. Quindi ci sono due vettori che soddisfano la condizione e sono : $\pm\dfrac{10}{7\sqrt{10}}\ (1,2,1)$

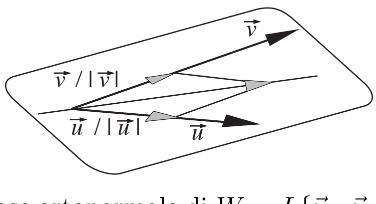
351. Dato che $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono linearmente indipendenti, la prima condizione implica che $\vec{w}$ sia combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$, cioè che $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. La seconda impone che $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$, cioè che $a\vec{u} \cdot \vec{v} + b\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ e quindi che $2a + 2b = 0$, ossia $b = -a$, da cui $\vec{w} = a\vec{u} - a\vec{v} = a(\vec{u} - \vec{v})$.
Per la terza condizione: la proiezione è $\dfrac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\,\vec{u} = \dfrac{(a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\,\vec{u} = \dfrac{3a}{5}\,(1, 2, 0)$ che ha modulo $\dfrac{|\,3a\,|}{5}|(1, 2, 0| = \dfrac{|\,3a\,|}{\sqrt{5}}$, da cui $a = \pm\sqrt{5}/3$. Ci sono dunque due soluzioni al problema: $\vec{w} = \pm(\sqrt{5}/3, \sqrt{5}/3, \sqrt{5}/3)$.

352. I vettori sono (x, y) e occorre che $\dfrac{(x, y) \cdot (-1, 2)}{|\,(x, y)\,|\,|\,(-1, 2)\,|} = \dfrac{1}{2}$, cioè $\dfrac{-x + 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}\,\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}$, da cui $-2x + 4y = \sqrt{5x^2 + 5y^2}$. Possiamo elevare a quadrato questa equazione
supponendo però che $-2x + 4y > 0$
e si ottiene $x^2 + 16xy - 11y^2 = 0$ che si può scrivere (ponendo $y \neq 0$) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 16\left(\dfrac{x}{y}\right) - 11 = 0$
da cui $(x/y) = -8 \pm 5\sqrt{3}$. I vettori sono quindi $((-8 \pm 5\sqrt{3})y, y)$, ma occorre che $-x + 2y > 0$, cioè che $(8 \mp 5\sqrt{3})y + 2y > 0$ e, dato che $10 \mp 5\sqrt{3} > 0$ nei due casi (sia con "+" che con "−"), allora occorre che $y > 0$. Quindi i vettori sono $((-8 \pm 5\sqrt{3})y, y)$ con $y > 0$.

353. Poniamo $\vec{v} = (x, y, z)$. Si deve avere
$\dfrac{(x, y, z) \cdot (0, -1, 1)}{|\,(x, y, z)\,|\,|\,(0, -1, 1)\,|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $(x, y, z) \cdot (1, 0, -2) = 0$ Da qui il sistema $\begin{cases} -y + z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ x - 2z = 0 \end{cases}$
La prima equazione non ha evidentemente soluzioni se $-y + z < 0$ e può essere elevata a quadrato, ponendo però $-y + z \geq 0$
$\begin{cases} y^2 + z^2 - 2yz = x^2 + y^2 + z^2 \\ x = 2z \end{cases}$ $\begin{cases} -2yz = x^2 \\ x = 2z \end{cases}$ Sostituendo $x = 2z$ al posto di x nella prima equazione: $\begin{cases} -2yz = 4z^2 \\ x = 2z \end{cases}$
Dato che la prima equazione è $z(-2y - 4z) = 0$, il sistema di secondo grado si spezza nell'unione dei due sistemi lineari $\begin{cases} z = 0 \\ x = 2z \end{cases}$ $\begin{cases} -2y = 4z \\ x = 2z \end{cases}$
Le soluzioni sono $(0, y, 0)$ e $(2z, -2z, z)$, ma, per la condizione posta $-y + z \geq 0$, occorre nel primo caso che $-y \geq 0$, cioè $y \leq 0$ e nel secondo caso che $2z + z \geq 0$, cioè $z \geq 0$.

354. a. I vettori ortogonali a $\vec{v}$ sono $a(3, 1)$.
Si deve avere $\dfrac{\vec{u}_1 \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\,\vec{w} = \dfrac{a(3, 1) \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\,\vec{w}$, da cui $(-1/5)(2, 1) = (a \cdot 7/5)(2, 1)$ e quindi $a = -1/7$.
Pertanto $\vec{u}_1 = (-3/7, -1/7)$.
b. Poniamo $\vec{u}_2 = (x, y)$. Allora $\dfrac{\vec{u}_2 \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\,\vec{w} = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\,\vec{w}$, da cui $-\dfrac{1}{5}\,(2, 1) = \dfrac{2x + y}{5}\,(2, 1)$ e quindi le condizioni $2x + y = -1$ e $x^2 + y^2 = 1$ da cui $\vec{u}_2 = (-4/5, 3/5)$ oppure $\vec{u}_2 = (0, -1)$.

355. Occorre determinare la bisettrice dei due vettori nel loro piano. Se i due vettori hanno lo stesso modulo, allora un vettore della bisettrice è la loro somma, per cui basta normalizzarli. I vettori cercati sono quindi: $a\left(\dfrac{\vec{u}}{|\,\vec{u}\,|} + \dfrac{\vec{v}}{|\,\vec{v}\,|}\right)$ con $a \in \mathbb{R}$. La situazione può essere schematizzata nel disegno a lato.



356. Per proiettare sul sottospazio di dimensione 2 occorre una base ortonormale di $W = L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. I vettori di W sono del tipo $a(1, 2, 0) + b(0, -1, 1) = (a, 2a - b, b)$. Cerchiamo un vettore di W ortogonale a $\vec{u}_1$: $(a, 2a - b, b) \cdot (1, 2, 0) = 0$ da cui $5a = 2b$, per esempio $a = 2$, $b = 5$ e si ottiene il vettore $(2, -1, 5)$. Quindi una base ortogonale per W è per esempio $(1, 2, 0), (2, -1, 5)$ e una ortonormale è $\vec{v}_1 = (1, 2, 0)/\sqrt{5}$, $\vec{v}_2 = (2, -1, 5)/\sqrt{30}$.
La proiezione di $(1, 0, 0)$ su W è quindi $((1, 0, 0) \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + ((1, 0, 0) \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 = (1/3, 1/3, 1/3)$.
L'angolo θ è tale che $\cos(\theta) = \dfrac{(1, 0, 0) \cdot (1/3, 1/3, 1/3)}{|\,(1, 0, 0)\,|\,|\,(1/3, 1/3, 1/3)\,|} = \sqrt{1/3}$ con $0 < \theta < 2\pi$.
Si ha $\theta \simeq 0.95$.