

3. SPAZI VETTORIALI: Lineare indipendenza e generatori

- F 301. Negli spazi vettoriali \mathbb{R}^3 e \mathbb{C}^3 (rispettivamente \mathbb{R} -spazio e \mathbb{C} -spazio), dimostrare che sono linearmente dipendenti le seguenti terne di vettori e scrivere per ogni terna due combinazioni lineari nulle a coefficienti non tutti nulli dei tre vettori:
- a. $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 1)$ b. $(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)$ in \mathbb{R}^3
 c. $(1, 4, 5), (2, 3, -1), (0, 0, 0)$ d. $(1, \pi, 0), (10^{45}, \pi, 2), (\pi, \pi^2, 0)$ in \mathbb{R}^3
 e. $(1, i, 0), (i, -1, 0), (0, 0, i)$ f. $(1, i, 1), (i, 1, -1), (1, 1, 0)$ in \mathbb{C}^3
- F 302. a. Nell' \mathbb{R} -spazio vettoriale \mathbb{R}^3 , esprimere se possibile $(1, 2, 0)$ come combinazione lineare dei vettori $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)$ in due modi diversi.
 b. Sempre nell' \mathbb{R} -spazio vettoriale \mathbb{R}^3 , esprimere se possibile $(1, 1, 1)$ come combinazione lineare dei vettori $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$ in due modi diversi.
- F 303. Nell' \mathbb{R} -spazio vettoriale \mathbb{R}^3 . Dati i vettori $(1, 2, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 2)$, dire quali dei quattro sono combinazione lineare dei rimanenti.
- F 304. Provare che sono linearmente indipendenti le seguenti successioni di vettori e completarle a base dello spazio vettoriale indicato.
- a. $(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)$ in \mathbb{R}^3 (\mathbb{R} -sp.) b. $(1, 1, 1), (2, 1, 0), (5, 0, 0)$ in \mathbb{R}^3 (\mathbb{R} -sp.)
 c. $(0, 1, 1)$ in \mathbb{R}^3 (\mathbb{R} -sp.) d. $(0, 1, 1), (0, 7, i)$ in \mathbb{C}^3 (\mathbb{C} -sp.)
 e. $(i, 0), (0, i)$ in \mathbb{C}^2 (\mathbb{C} -sp.) f. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ in $M_{22}(\mathbb{R})$ (\mathbb{R} -sp.)
- F 305. Siano u, v vettori di un \mathbb{C} -spazio vettoriale V . Esprimere in due modi distinti u come combinazione lineare di $u + v, u - v, v$. Quanti modi esistono ?
- F 306. a. Dire perché i vettori $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 2), v_3 = (1, 2, 3), v_4 = (-1, 2, 1)$ in \mathbb{R}^3 sono linearmente dipendenti e scrivere tutte le relazioni di lineare dipendenza tra essi.
 b. Dire in che modo è possibile operare degli scarti tra i quattro vettori in modo che i restanti siano linearmente indipendenti.
- T 307. Siano u, v, w vettori di un \mathbb{K} -spazio vettoriale V . Provare che:
- a. Se u, v, w sono vettori linearmente dipendenti e u, v sono linearmente indipendenti, allora w è combinazione lineare di u e v .
 b. Mostrare con un controesempio che, se u, v, w sono vettori linearmente dipendenti e anche u, v sono linearmente dipendenti, non è detto che w sia combinazione lineare di u e v .
 c. Se u, v, w sono linearmente indipendenti anche $u - v, u + v, v + w$ lo sono.
 d. Se u, v, w sono linearmente dipendenti anche $u - v, u + v, v + w$ lo sono.
 e. Se u, v, w generano V anche $u - v, u + v, v + w$ lo generano.
- T 308. Siano u e v vettori linearmente indipendenti in un \mathbb{K} -spazio vettoriale V . Per quali $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ i vettori $au + bv, cu + dv$ sono linearmente indipendenti ?

3. SPAZI VETTORIALI: Sottospazi e dimensione

- F 310. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sotto-spazi vettoriali e in caso positivo determinarne una base.
- a. $V = \{(x, y) : xy = 0\}$ in \mathbb{R}^2
 b. $V = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{Q}\}$ in \mathbb{R}^3
 c. $V = \{(x, y, z) : x + 2y + z = 1\}$ in \mathbb{R}^3
 d. $V = L\{(1, 1, 0), (0, 0, 0), (0, 2, 1)\}$ in \mathbb{R}^3
 e. $V = \{(1, 1, 0), (0, 2, 1)\}$ in \mathbb{R}^3
 f. $V = \{(x, y, z, t) : x = 3y = 3z - t\}$ in \mathbb{R}^4
 g. $V = \{(a - b, a + 2b, 3b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ in \mathbb{R}^3
 h. $V = \{(x, y) : x = iy\}$ in \mathbb{C}^2

- i. $V = \{(x, y, z) : x^2 = y\}$ in \mathbb{R}^3
 j. $V = \{A : \det(A) = 0\}$ in $M_{22}(\mathbb{R})$
- A 311. Ricordiamo che nell' \mathbb{R} -spazio $M_{nn}(\mathbb{R})$ si ha:
 a. A è simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j .
 b. A è antisimmetrica se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j .
 c. A è diagonale se $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.
 d. A è triangolare superiore (inferiore) se $a_{ij} = 0$ per $i > j$ ($i < j$).
 Nell' \mathbb{R} -spazio $M_{nn}(\mathbb{C})$ si ha:
 e. A è hermitiana se $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ (coniugato) per ogni i, j .
 Provare che le matrici simmetriche etc. costituiscono sottospazi. Per $n = 2$ e per $n = 3$ determinare basi dei sottospazi.
- F 312. Determinare due diverse basi per il sottospazio di \mathbb{R}^3 generato da $(1, 1, 0), (1, 3, 2), (0, 1, 1)$.
- F 313. Dire perché è possibile completare i vettori $(1, 0, -1, 1), (2, 0, 1, -1)$ a base di \mathbb{R}^4 e farlo in almeno due modi differenti usando vettori della base canonica.
- C 314. Determinare una base e un sistema di generatori che non sia base per ciascuno dei seguenti sottospazi di \mathbb{R}^3 :
 a. $V_1 = \{(x, y, z) : x + y = 2x - 3z = 0\}$ b. $V_2 = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\}$
- F 315. In \mathbb{R}^4 è dato il sottospazio $W = L\{(1, 2, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\}$. Scrivere tutti i suoi vettori e dire se ce n'è uno appartenente anche al sottospazio $V_1 = \{(x, y, z, t) : x + 2y - z + 2t = 0\}$
- C 316. In \mathbb{R}^4 . Sia $V = L\{(1, 2, 0, 1), (0, 0, 1, -2), (1, 2, 1, -1), (1, 1, 0, 0)\}$. Dire che dimensione ha V e quante basi per V si possono estrarre dal sistema di generatori dato.
- F 317. In \mathbb{R}^3 . Sia Dire perché $\mathcal{B} : (1, 1, 0), (0, 2, 1), (0, 0, 2)$ è una base e scrivere $v_{\mathcal{B}}$ dove $v = (1, 2, 1)$. Esiste un vettore v tale che $v_{\mathcal{B}} = [1 \ 2 \ 3]^T$?
- F 318. In \mathbb{R}^3 sia W il sottospazio una cui base è $\mathcal{B} : (1, 2, 0), (0, 1, -1)$.
 a. Scrivere un'altra base \mathcal{B}_1 costituita da vettori non proporzionali a quelli della base \mathcal{B} .
 b. Dire quale tra i vettori $v = (1, 0, 2)$, $w = (0, 1, 2)$ appartiene a W e per questo vettore determinare la matrice delle coordinate rispetto a \mathcal{B} e quella rispetto a \mathcal{B}_1 .
 c. Scrivere una base \mathcal{B}_2 di W rispetto a cui il vettore trovato in b. abbia coordinate $[1 \ 0]^T$
- F 319. Sia $W = L\{(1, 2, 2, 0), (0, 2, 3, -1), (3, 2, 0, 2), (1, 1, 1, 1)\}$ sottospazio di \mathbb{R}^4 .
 a. Determinare $\dim(W)$, una base \mathcal{B} per W e scrivere tutti i vettori di W .
 b. Dire quali tra i seguenti due vettori stanno in W : $w_1 = (1, 0, -1, 1)$, $w_2 = (2, 1, 1, 1)$
 c. Trovare (se esiste) un vettore $w \in W$ con le prime due componenti nulle.
 d. Calcolare la matrice delle coordinate di w rispetto a \mathcal{B} .
 e. Scrivere un'altra base \mathcal{B}_1 di W il cui primo vettore sia w .
- F 320. Sia $V = L\{(1, 2, 0, 1), (0, 1, -1, 1), (1, 0, 2, -1)\}$ sottospazio di \mathbb{R}^4 . Dire quali tra i seguenti due vettori stanno in V : $v_1 = (2, 1, 3, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3, -1)$.
- C 321. In \mathbb{R}^3 . Trovare una base \mathcal{B} rispetto alla quale $v(1, 2, 1)$ abbia coordinate $[1 \ 1 \ 1]^T$ e $w = (0, 1, 1)$ abbia coordinate $[0 \ 1 \ 1]^T$.
- A 322. In \mathbb{R}^4 . Provare che $V \subset W$ nei casi a. b. c. e che $V \not\subset W$ nel caso d.
 a. $V = L\{(0, 1, 1, 2), (0, 2, 0, 2)\}$ $W = \{(x, y, z, t) : x + y + z = t\}$
 b. $V = L\{(3, 0, 2, 1), (2, 2, 3, 1)\}$ $W = L\{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$
 c. $V = \{(x, y, z, t) : x + y + z = z - 2t = 0\}$ $W = L\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (3, -1, 2, 1)\}$
 d. $V = \{(x, y, z, t) : x + y + z = z - t = 0\}$ $W = L\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (3, -1, 2, 1)\}$
- C 323. In $M_{22}(\mathbb{R})$. Sia $V = \{A : A \cdot B = B \cdot A\}$ (B matrice fissata).
 a. Provare che V è sempre sottospazio.
 b. Trovarne una base nel caso in cui B sia la matrice a lato.
- $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$
- A 324. Come il problema precedente, ma con $V = \{A : A \cdot B \text{ sia diagonale}\}$.

3. SPAZI VETTORIALI: Vettori geometrici

F 331. Dire quali di queste affermazioni sono vere:

- AB è un segmento orientato
- AB è un vettore (libero)
- AB rappresenta un vettore libero



F 332. Siano $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vettori geometrici. Dire quali di queste operazioni hanno senso e in caso positivo dire se il risultato è un vettore o uno scalare.

- | | | | | |
|---|--|--|--|--|
| a. $ \vec{w} \vec{v}$ | b. $ \vec{v} \vec{w} $ | c. $\frac{\vec{v}}{ \vec{w} }$ | d. $\frac{ \vec{v} }{\vec{w}}$ | e. $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$ |
| f. $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}$ | g. $(\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$ | h. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$ | i. $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$ | j. $\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ |
| k. $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$ | l. $\vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{w}$ | m. $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$ | | |

F 333. Calcolare $((1, 2, 0) \wedge (3, 2, 0)) \wedge (1, 1, 1)$ e $(1, 2, 0) \wedge ((3, 2, 0) \wedge (1, 1, 1))$

C 334. Sia $|\vec{v}| = 1$. Esiste un vettore \vec{w} di modulo 2 tale che $\vec{v} \cdot \vec{w} = 5$?
Ed esiste \vec{w} di modulo 2 tale che $\vec{v} \cdot \vec{w} = -1$?

T 335. Provare che se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$, allora $|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v}| = 8$.

T 336. Dimostrare che se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$ e $a \in \mathbb{R}$, allora:

- $(\vec{u} + a\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} \wedge \vec{w} = 0$

T 337. Siano $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \neq \vec{0}$ vettori e supponiamo che $\vec{u} \neq \vec{0}$ formi lo stesso angolo sia con \vec{w}_1 che con \vec{w}_2 e che $\vec{v} \neq \vec{0}$ abbia la stessa proprietà. Dimostrare che se $a\vec{u} + b\vec{v}$ è non nullo allora esso ha ancora la stessa proprietà.

Supponiamo d'ora in poi che nell' \mathbb{R} -spazio vettoriale V_3 sia fissata una base ortonormale destrorsa $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Indicheremo quindi i vettori con le loro coordinate rispetto a tale base. Per esempio con $(1, 2, -1)$ indicheremo il vettore $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Salvo diverso avviso i seguenti problemi sono nello spazio V_3 .

In alcuni problemi lo spazio è V_2 con una base ortonormale \vec{i}, \vec{j} .

F 341. Provare che esistono due vettori di modulo 5 paralleli a $(1, 2, -1)$ e determinarli.

F 342. Determinare un vettore di modulo 1 ortogonale a $(1, 2, 3)$ e a $(1, 1, -1)$.

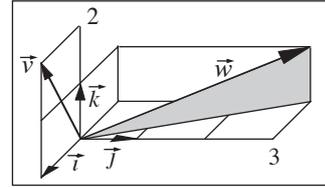
F 343. Dati i due vettori $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (2, -1, 2)$ e il sottospazio $W = L\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ da essi generato.

- Determinare un vettore $\vec{v} \in W$ di modulo 1, ortogonale a \vec{j} .
- Determinare il vettore $\vec{w} \in W$ di modulo 1, avente anche le seguenti due proprietà
 \vec{w} sia ortogonale a \vec{v}_1 \vec{w} formi un angolo acuto con \vec{v}_2
- Calcolare la matrice delle coordinate di \vec{v} e di \vec{w} rispetto alla base $\mathcal{B} : \vec{v}_1, \vec{v}_2$ di W .

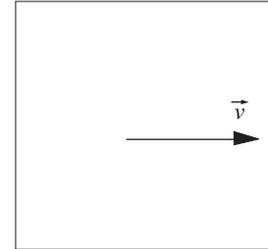
F 344. In V_3 sono assegnati i due vettori $\vec{v} = (1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (0, -1, 2)$.

- Determinare una base ortonormale \mathcal{B} per $W = L\{\vec{v}, \vec{w}\}$.
- In W , determinare le coordinate di \vec{v} e \vec{w} rispetto alla base \mathcal{B} .
- Completare i due vettori di \mathcal{B} a base ortonormale \mathcal{B}_1 per V_3 .

- F 345. In V_3 sono dati i due vettori \vec{v} e \vec{w} rappresentati dai segmenti orientati disegnati.
 Sia poi $W = L\{\vec{v}, \vec{w}\}$ il sottospazio vettoriale da essi generato.
- Calcolare l'angolo θ tra \vec{v} e \vec{w} .
 - Scrivere le coordinate di un vettore $\vec{u} \in W$ e ortogonale a \vec{k} .
 - Completare \vec{u} a base ortogonale di W .
 - Completare \vec{u} a base ortogonale di V_3 .



- F 346. In V_3 sono dati i tre vettori di modulo 1:
 $\vec{v}(-2, 2, 1)/3$ $\vec{w}(1, 2, -2)/3$ $\vec{u}(1, -4, 1)/\sqrt{18}$
- Verificare che sono linearmente dipendenti.
 - Calcolare i loro angoli reciproci.
 - Usare i dati per effettuare uno schizzo della posizione dei tre vettori nello spazio di dimensione 2 da essi generato, rappresentato nel disegno dal quadrato.



- C 347. Determinare i vettori $\vec{v} \neq \vec{0}$ tali che $\vec{v} - \vec{i}$ sia ortogonale a $(1, 1, 2)$ e \vec{v} sia ortogonale a \vec{j} .
- F 348. Provare che esistono due vettori \vec{v} paralleli a $(1, -1, 1)$ tali che $\vec{v} - \vec{i}$ abbia modulo 3.
- C 349. Dire se sono destrorse o sinistrorse le seguenti basi di V_3 :
- $\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}$
 - $\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}$
 - $\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{j}$
- C 350. a. Proiettare il vettore $(1, 2, 1)$ sul vettore $(0, 3, 1)$.
 b. Trovare un vettore multiplo di $(1, 2, 1)$ la cui proiezione su $(0, 3, 1)$ abbia modulo 1. Ne esiste uno solo?
- A 351. Siano $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, -1)$. Determinare \vec{w} tale che simultaneamente:
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ siano linearmente dipendenti.
 - \vec{w} sia ortogonale a \vec{v} .
 - la proiezione di \vec{w} su \vec{u} abbia modulo 1.
- C 352. In V_2 : Determinare tutti i vettori che formano un angolo di $\pi/3$ col vettore $(-1, 2)$.
- C 353. Determinare tutti i vettori formanti un angolo di $\pi/4$ con $(0, -1, 1)$ e di $\pi/2$ con $(1, 0, -2)$.
- A 354. In V_2 : Siano $\vec{v} = (1, -3)$ e $\vec{w} = (2, 1)$:
- Determinare \vec{u}_1 ortogonale a \vec{v} tale che la proiezione di \vec{u}_1 su \vec{w} coincida con la proiezione di \vec{v} su \vec{w} .
 - Determinare \vec{u}_2 di modulo 1 tale che la proiezione di \vec{u}_2 su \vec{w} coincida con la proiezione di \vec{v} su \vec{w} .
- T 355. Siano \vec{u}, \vec{v} vettori non nulli. Determinare tutti i vettori linearmente dipendenti con \vec{u} e \vec{v} e formanti con essi angoli uguali.
- A 356. a. Dati i vettori $\vec{u}_1 = (1, 2, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, -1, 1)$, determinare la proiezione ortogonale del vettore $(1, 0, 0)$ sul sottospazio $L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.
 b. Calcolare l'angolo θ tra il vettore $(1, 0, 0)$ e lo spazio $L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.