Cognome ______________________ Nome ______________________

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 8 ottobre 2001

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle seguenti domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

$\boxed{\mathcal{A}}$ Sono dati i sistemi lineari 3×4 seguenti nelle incognite x, y, z, t, dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} -x \quad +k\,y \qquad\qquad\qquad\qquad +t = 0 \\ k\,x \quad +2k\,y \quad +(2-k)\,z = k \\ \qquad\qquad (3k^2+3k)\,z \quad +(1-k^2)\,t = -3 \end{cases}$$

1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ scrivere la matrice completa associata al sistema e una matrice ridotta equivalente a quella associata al sistema.
2. Dire per ogni $k \in \mathbb{R}$ se il sistema ha soluzioni e quante.
3. Nei casi $k = -2, 0$ determinare <u>tutte</u> le soluzioni (se ce ne sono).
4. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ la quaterna $(1, 0, 0, 1)$ è soluzione del sistema.

Continuare nella pagina successiva, se necessario.

La matrice completa del sistema è: $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & k & 0 & 1 & 0 \\ k & 2k & 2-k & 0 & k \\ 0 & 0 & 3k^2+3k & 1-k^2 & -3 \end{array}\right)$ *È chiaro che, se $k \neq 0$, allora la matrice non è ridotta, mentre, sostituendo $k = 0$, si vede subito che per $k = 0$ è ridotta.*

Eseguiamo l'algoritmo di Gauss: mediante l'operazione $R_2 \to R_2 + kR_1$ (eseguibile, ma non significativa se $k = 0$), la matrice diventa: $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2k+k^2 & 2-k & k & k \\ 0 & 0 & 3k^2+3k & 1-k^2 & -3 \end{array}\right)$

Ora la matrice è ridotta con pivot -1 , $2k+k^2$, $3k^2+3k$, a patto che i tre pivot non siano nulli, cioè che $k \neq 0, -2, -1$. In questi infiniti casi il sistema lineare ha 4 incognite, tre pivot nella matrice dei coefficienti e quindi ha ∞^1 soluzioni che dipendono dall'incognita non pivotale t.

Esaminiamo i tre casi rimanenti:

$\boxed{k = 0}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$

La matrice è ridotta con tre pivot e il sistema ha ∞^1 soluzioni che dipendono dall'incognita non pivotale y:

$\begin{cases} -x+t = 0 \\ 2z = 0 \\ t = -3 \end{cases}$ *per cui le soluzioni sono $(-3\ ,\ y\ ,\ 0\ ,\ -3)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$*

$\boxed{k = -2}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & -3 \end{array}\right)$

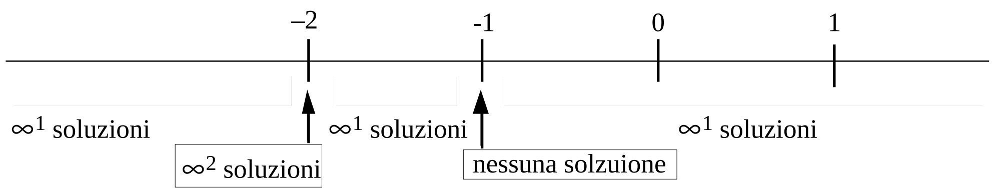
Se si esegue $R_3 \to R_3 - 3/2R_2$ la terza riga proporzionale alla seconda diventa nulla, la matrice è ridotta con due pivot e quindi il sistema lineare ha ∞^2 soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali y, t.

$\begin{cases} -x-2y+t = 0 \\ 4z-2t = -2 \end{cases}$ *per cui le soluzioni sono $(-2y+t\ ,\ y\ ,\ (t-1)/2\ ,\ t)$ al variare di $y, t \in \mathbb{R}$.*

$\boxed{k = -1}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$

La matrice è ridotta con tre pivot, ma un pivot è nella quinta colonna, per cui il, sistema non ha soluzioni.

In conclusione:



Per vedere se $(1,0,0,1)$ *è soluzione, basta sostituire la quaterna nel sistema:*

$$\begin{cases} -1+1 & = & 0 \\ k & = & k \\ (1-k^2) & = & -3 \end{cases}$$

Quindi la quaterna sodisfa sempre le prime due equazioni, mentre soddisfa la terza solo se $1-k^2=-3$*, cioè se* $k^2=4$*, ovvero se* $k=\pm 2$*.*

Pertanto solo in questi due casi il sistema ha la soluzione $(1,0,0,1)$*.*

$\boxed{\mathcal{B}}$ Dire perché la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare delle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in un solo modo e determinare tale combinazione lineare.

Poniamo $$a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè $$\begin{pmatrix} a-b+d & 2a+3b \\ a+c+d & b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui $$\begin{cases} a-b+d & = & 1 \\ 2a+3b & = & 0 \\ a+c+d & = & 0 \\ b+2c & = & 0 \end{cases}$$ *sistema lineare* 4×4 *in* a,b,c,d *associato alla matrice* $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

L'algoritmo gaussiano inizia con $\begin{array}{c} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R3 \to R_3 - R_1 \end{array}$ $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Può convenire eseguire $R_2 \leftrightarrow R_3$ $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ *e poi* $\begin{array}{c} R_3 \to R_3 - 5R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{array}$ $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Infine con $\begin{array}{c} R_3 \leftrightarrow R_4 \\ R_4 \to R_4 + 5R_3 \end{array}$ *si ottiene la matrice ridotta* $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 8 \end{array}\right)$$

Quindi c'è una soluzione che si ricava immediatamente: $(3\ ,\ -2\ ,\ 1\ ,\ -4)$*. La combinazione lineare richiesta è perciò:*

$$3a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$