Cognome ______________________________ Nome ______________________________

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 22 ottobre 2001

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle seguenti domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

nti 10 $\boxed{\mathcal{A}}$ Sono dati i sistemi lineari $Ax = b$ in 3 incognite, dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$. $A = \begin{pmatrix} k+2 & k^2+2 & k+2 \\ k-2 & 2k^2-k-2 & -k^2 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 3k \\ 2k-1 \\ k^3+5k^2-6k \end{pmatrix}$

Per ogni $k \in \mathbb{R}$ dire se il sistema ha soluzioni e quante.

Aiuto calcolativo: $(k+2)(2k^2-k-2)-(k^2+2)(k-2) = k^3+5k^2-6k$

Calcoliamo innanzitutto il determinante di A sviluppando lungo la terza riga:
$\det(A) = (k-1)\cdot[\,(k+2)(2k^2-k-2)-(k^2+2)(k-2)\,] = (k-1)(k^3+5k^2-6k)$.
Il $\det$ *si annulla se $k-1=0$ o se $k^3+5k^2-6k=0$ cioè se $k=0$ o $k^2+5k-6=0$. L'ultima equazione di secondo grado ha le soluzioni $k=1$ e $k=-6$. In definitiva, se $k \neq 1, 0, -6$, la matrice ha determinante non nullo, quindi $\varrho(A)=3$ e, dato che $\varrho(A \mid b) \geq \varrho(A)$, allora $\varrho(A \mid b)=3$ e quindi il sistema ha una e una sola soluzione.*

Se $k=0$: $(A \mid b) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$ La matrice A non ha caratteristica 3, mentre $(A \mid b)$ ha caratteristica 3, perché è evidentemente diverso da 0 il $\det$ *della sottomatrice formata dalle ultime tre colonne (basta sviluppare lungo l'ultima colonna), quindi il sistema non ha soluzioni.*

Se $k=1$: $(A \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c|c} 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ La matrice A ha caratteristica 1 perché ha tre righe proporzionali, mentre $(A \mid b)$ ha caratteristica 2, perché è diverso da 0 il $\det$ *della sottomatrice formata dalle ultime due colonne e dalle due prime righe, quindi il sistema non ha soluzioni.*

Se $k=-6$: $(A \mid b) = \left(\begin{array}{c|cc|c} -4 & 38 & -4 & -18 \\ -8 & 76 & -36 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right)$ La matrice A non ha caratteristica 3, mentre $(A \mid b)$ ha caratteristica 3, perché è diverso da 0 il $\det$ *della sottomatrice formata dalle ultime tre colonne (basta sviluppare lungo l'ultima riga), quindi il sistema non ha soluzioni.*

In conclusione il sistema non ha soluzioni se $k=0,1,-6$, Negli altri casi ne ha una sola.

---

punti 6 $\boxed{\mathcal{B}}$ Sono date due matrici $A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$ tali che $A^3 = I$ e $B^3 = 0$. Dire se A è invertibile e se B è invertibile e perché.

L'eguaglianza $A^3 = I$ si scrive anche come $A^2 \cdot A = I$ o come $A \cdot A^2 = I$, per cui A è invertibile dato che A^2 è la sua inversa.

Se B fosse invertibile, esisterebbe B^{-1}, quindi $B^{-1}\cdot B^3 = B^{-1}\cdot 0$, da cui $B^2 = 0$ e $B^{-1}\cdot B^2 = B^{-1}\cdot 0$ da cui $B=0$, ma la matrice nulla non è invertibile, quindi neanche B lo è.

nti 6 $\boxed{\mathcal{C}}$ In $M_{55}(\mathbb{R})$, risolvere l'equazione $AX = B^{-1} + A$ nell'incognita X, sapendo che:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & 0 & 2 & \\ & 0 & 3 & 0 & \\ & -1 & 0 & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 5 & 1 & \\ & & 4 & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Moltiplichiamo a sinistra per A^{-1} :
Si ha : $A^{-1} \cdot AX = A^{-1}B^{-1} + A^{-1}A \qquad X = A^{-1}B^{-1} + I \qquad X = (B \cdot A)^{-1} + I.$
Quindi occorre calcolare $(B \cdot A)^{-1}$. Essendo la matrice a blocchi, basta calcolare l'inversa dei singoli blocchi. L'unico blocco la cui inversa non è ovvia è quello centrale di cui calcoliamo l'inverso mediante l'algoritmo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - 4/5R_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & -4/5 & 1 \end{array}\right) R_2 \to 5 \cdot R_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

$$R_1 \to R_1 - R_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{array}\right) R_1 \to (1/5)R_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

Quindi: $$X = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1/3 & & & \\ & & 1 & -1 & \\ & & -4 & 5 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 4/3 & & & \\ & & 2 & -1 & \\ & & -4 & 6 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

---

nti 5 $\boxed{\mathcal{D}}$ Dimostrare che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2 usando la definizione intrinseca (quella coi minori).

La matrice ha un minore di ordine 2 *non nullo (per esempio il* det *della sottomatrice formata dalle ultime due righe e colonne) . Esaminiamo i quattro minori di ordine* 3 *ottenuti escludendo nell'ordine C_1, C_2, C_3, C_4:*

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Questo prova che A ha caratteristica 2.

---

nti 5 $\boxed{\mathcal{E}}$ Dimostrare che nella matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la quarta colonna è combinazione lineare delle altre 3, determinando esplicitamente la combinazione.

$aC_1 + bC_2 + cC_3 = C_4$ è un sistema lineare la cui matrice completa è proprio A, quindi riduciamo A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$ *escludo R_2 proporzionale a R_3* $R_3 \to R_3 + R_2$ $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La soluzione è ora evidente: $a = 1$; $b = -2$; $c = 1$*, cioè* $C_1 - 2C_2 + C_3 = C_4$