COGNOME ______________________ NOME ______________________

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 5 novembre 2001

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle seguenti domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte. Grafici e disegni dovranno essere chiari e non ambigui.

nti 12 $\mathcal{A}$ È dato il numero complesso $\alpha = -\frac{\sqrt{27}}{5} - \frac{3}{5}\,i$

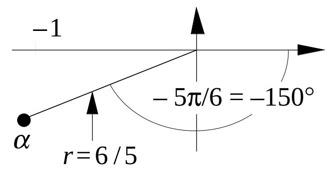
Disegnare nel piano di Argand-Gauss i seguenti tre oggetti:

1. il numero α
2. il numero α^5
3. l'insieme $\{z \in \mathbb{C} \,:\, z^5 = \alpha \text{ AND } \mathrm{Re}\,(z) < 0 \text{ AND } \mathrm{Im}\,(z) < 0\}$

Si ha: $\mid \alpha \mid = \sqrt{\frac{27}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}$. *Un argomento di* α *è dato da*

$$\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{27}/5}{6/5} = -\frac{3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{3/5}{6/5} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Per esempio $\theta = -5\pi/6$ *(oppure* $\theta = 7\pi/6$*).*

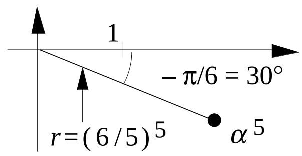


Modulo e argomento bastano a disegnare α. *Il modulo è* 1.2*, poco più di* 1.

Si ha poi: $\alpha = \frac{6}{5}\,e^{-5\pi/6}$, *quindi* $\alpha^5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 e^{-25\pi/6}$

L'argomento è $-\frac{25\pi}{6} = -\frac{24\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -8\pi - \frac{\pi}{6}$ *equivalente trigonometricamente a* $-\pi/6$.

Modulo e argomento bastano a disegnare α^5. *Il modulo è* $(6/5)^5$*, circa* 2.5*).*



Risolviamo ora l'equazione $z^5 = \alpha$ *le cui soluzioni sono, come ben noto:*

$$z_k = \sqrt[5]{6/5}\,e^{-\pi/6 + 2k\pi/5} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Per sapere se soddisfano le altre due condizioni $\mathrm{Re}\,(z) < 0$ $\mathrm{Im}\,(z) < 0$ *, occorre esaminare gli argomenti. Quelli che ci interessano sono nel terzo quadrante.*

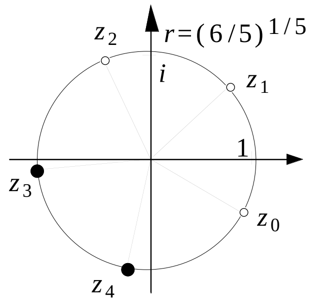
$k = 0$ *argomento* $-\pi/6$*: siamo nel quarto quadrante.*

$k = 1$ *argomento* $-\pi/6 + 2\pi/5 = 7\pi/30$*: dato che* $0 < 7\pi/30 < 15\pi/30$*, siamo nel primo quadrante.*

$k = 2$ *argomento* $-\pi/6 + 4\pi/5 = 19\pi/30$*: dato che* $15\pi/30 < 19\pi/30 < 30\pi/30$*, siamo nel secondo quadrante.*

$k = 3$ *argomento* $-\pi/6 + 6\pi/5 = 31\pi/30$*: dato che* $30\pi/30 < 31\pi/30 < 45\pi/30$*, siamo nel terzo quadrante.*

$k = 4$ *argomento* $-\pi/6 + 8\pi/5 = 43\pi/30$*: dato che* $30\pi/30 < 43\pi/30 < 45\pi/30$*, siamo nel terzo quadrante.*



Le radici che ci interessano sono quindi z_3 *e* z_4 *che hanno modulo* $\sqrt[5]{6/5}$ *(poco più di* 1*) e argomenti rispettivamente* $31\pi/30$ *(poco più di un angolo piatto) e* $43\pi/30$ *(poco meno di* $3\pi/2$*).*

Quindi l'insieme è costituito dai due numeri z_3 *e* z_4.

---

punti 5 $\mathcal{B}$ Scrivere un polinomio $P(x)$ a coefficienti complessi di grado minimo che soddisfi tutte le seguenti tre condizioni:

i sia radice di molteplicità 2 $\qquad$ 1 sia radice di molteplicità 1 $\qquad$ $P(2) = 5$

Il polinomio $P(x)$ *deve avere i fattori* $(x - i)^2$ *e* $(x - 1)$. *Dato che è a coefficienti complessi, non è necessario che anche* $-i$ *sia radice. Per aver grado minimo deve essere*

$$P(x) = a(x - i)^2(x - 1) \qquad a \in \mathbb{C}$$

Si ha: $P(2) = a(2 - i)^2(2 - 1) = 5$, $a = \frac{5}{(2-i)^2} = \frac{5(2+i)^2}{[(2-i)(2+i)]^2} = \frac{5(2+i)^2}{5^2} = \frac{3+4i}{5}$

Quindi:

$$P(x) = \frac{1}{5}(3 + 4i)(x - i)^2(x - 1)$$

nti 8 $\boxed{\mathcal{C}}$ In $M_{22}(\mathbb{C})$ è data, al variare di $k \in \mathbb{C}$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1+2i & k^{15} \\ 3-4i & 1-2i \end{pmatrix}$

1. Dire per quanti $k \in \mathbb{C}$ la matrice A <u>non</u> è invertibile e per quanti $k \in \mathbb{R}$ la matrice <u>non</u> è invertibile.
2. Sia k=1. Determinare A^{-1}, con ogni elemento di A^{-1} scritto nella forma algebrica $a + bi$.

$\det \begin{pmatrix} 1+2i & k^{15} \\ 3-4i & 1-2i \end{pmatrix} = (1+2i)(1-2i) - (3-4i) \cdot k^{15} = 5 - (3-4i)k^{15}$.

Il $\det$ *è nullo se* $k^{15} = \dfrac{5}{3-4i} = \dfrac{5(3+4i)}{25} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$.

Dato che l'equazione ha 15 *radici complesse, esistono* 15 *numeri complessi* k *per cui* A *non è invertibile. Dato che evidentemente nessuna radice è reale (una potenza quindicesima di un numero reale è reale), non esiste alcun numero reale* k *per cui* A *non sia invertibile.*

Calcoliamo A^{-1} *per* $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1+2i & 1 & 1 & 0 \\ 3-4i & 1-2i & 0 & 1 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - \frac{3-4i}{1+2i} R_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1+2i & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{2+4i}{1+2i} & -\dfrac{3-4i}{1+2i} & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1+2i & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1+2i & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 \to 1/2 R_2 \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1+2i & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2+i & 1/2 \end{array}\right) R_1 \to R_1 - R_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1+2i & 0 & 1/2-i & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2+i & 1/2 \end{array}\right)$$

$$R_1 \to 1/(1+2i) R_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & (-3-6i)/10 & -1/10 \\ 0 & 1 & 1/2+i & 1/2 \end{array}\right)$$

<u>Altro modo:</u> Dato che A *è solo* 2×2 *può essere conveniente usare la formula esplicita per l'inversa:* $\det(A) = (1+2i)(1-2i) - (3-4i) = 2+4i$, *Quindi* A^{-1} *è quella a lato. Si eliminano i denominatori moltiplicando e dividendo ogni elemento per* $2-4i$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-2i}{2+4i} & \dfrac{-1}{2+4i} \\[2ex] \dfrac{-3+4i}{2+4i} & \dfrac{1+2i}{2+4i} \end{pmatrix}$$

In ogni caso : $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} (-3-6i)/10 & -1/10 \\ 1/2+i & 1/2 \end{pmatrix}$

---

nti 7 $\boxed{\mathcal{D}}$ Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono dati i seguenti 4 vettori:

$v_1 = (1, 0, 1) \qquad v_2 = (1, 1, 2) \qquad v_3 = (1, 2, 3) \qquad v_4 = (-1, 2, 1)$

1. Dire perché sono linearmente dipendenti e determinare una relazione di lineare dipendenza tra essi.

Vediamo se esistono a, b, c, d *non tutti nulli tali che* $a(1,0,1) + b(1,1,2) + c(1,2,3) + d(-1,2,1) = (0,0,0)$, *cioè se ha soluzioni non banali il sistema omogeneo che ha come matrice dei coefficienti* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Il sistema ha $\infty^{4-\varrho(A)}$ *soluzioni e, dato che* $\varrho(A) \leq 3$, *ne ha infinite, quindi i vettori sono linearmente dipendenti. Cerchiamo una soluzione riducendo:*

$$R_3 \to R_3 - R_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - R_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una soluzione è per esempio
$a = 1\ ;\ b = -2\ ;\ c = 1\ ;\ d = 0$

$$v_1 - 2v_2 + v_3 + 0v_4 = 0$$