COGNOME ________________ NOME ________________

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 26 novembre 2001

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle seguenti domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

nti 15 $\boxed{\mathcal{A}}$ Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita come:
$f(x, y, z, t) = (x + 2y + z\ ,\ 2x + 2y + t\ ,\ x - 2y - 3z + 2t)$

1. Determinare una base per $\ker(f)$
2. Determinare una base per $\mathrm{Im}\,(f)$
3. Determinare, se esiste, un vettore $v \in L\{(1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, -1)\}$ tale che $f(v) = (0, 1, 2)$.

---

1. *Dato che* $\ker(f) = \{v \in \mathbb{R}^4\ :\ f(v) = 0\}$, *allora i vettori* v *del nucleo si trovano risolvendo il sistema lineare* $f(x, y, z, t) = 0$ *nelle incognite* x, y, z, t *cioè:*
$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + t = 0 \\ x - 2y - 3z + 2t = 0 \end{cases} \quad \textit{sistema omogeneo associato alla matrice} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\textit{Eseguiamo} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix} \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$
Eliminando l'ultima riga, la matrice è ridotta e ha caratteristica 2, *quindi il sistema ha* ∞^2 *soluzioni che sono:* $(z - t\ ,\ -z + \frac{1}{2}t\ ,\ z\ ,\ t)$ *e che si possono scrivere come:* $z(1, -1, 1, 0) + t(-1, \frac{1}{2}, 0, 1)$. *Quindi i due vettori* $(1, -1, 1, 0)\ ,\ (-1, \frac{1}{2}, 0, 1)$ *generano* $\ker(f)$. *I due vettori sono non proporzionali e quindi sono linearmente indipendenti. Pertanto costituiscono una base per* $\ker(f)$

2. *Si ha* $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\ker(f)) = 4 - 2 = 2$. *Quindi due vettori lineramente indipendenti di* $\mathrm{Im}\,(f)$ *ne costituiranno senz'altro una base.*
Calcoliamo $f(1, 0, 0, 0) = (1, 2, 1)$ $\quad f(0, 1, 0, 0) = (2, 2, -2)$. *Qunidi i due vettori* $(1, 2, 1)\ ,\ (2, 2, -2)$ *appartengono all'immagine. Essendo due vettori di* $\mathrm{Im}\,(f)$ *non proporzionali sono anche linearmente indipendenti, quindi costituiscono una base per* $\mathrm{Im}\,(f)$.

3. *I vettori di* $L\{(1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, -1)\}$ *sono tutti i vettori del tipo*
$a(1, 0, 0, 1) + b(0, 0, 1, -1) = (a, 0, b, a - b)$. *Calcoliamone la loro immagine:*
$f(a, 0, b, a - b) = (a + 2\cdot 0 + b\ ,\ 2a + 2\cdot 0 + (a - b)\ ,\ a - 2\cdot 0 - 3b + 2(a - b)) = (a + b\ ,\ 3a - b\ ,\ 3a - 5b)$.
Si richiede che $(a + b\ ,\ 3a - b\ ,\ 3a - 5b) = (0, 1, 2)$ *il che porta a sistema lineare* 3×2 *nelle incognite* a, b:
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a - b = 1 \\ 3a - 5b = 2 \end{cases} \quad \textit{sistema associato alla matrice} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -8 & 2 \end{array}\right).$$
Il sistema ha quindi un'unica soluzione che è $a = 1/4\ ,\ b = -1/4$.
Quindi il vettore cercato è $(a, 0, b, a - b) = \left(\frac{1}{4}\ ,\ 0\ ,\ -\frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$.

nti 15 $\boxed{\mathcal{B}}$ Nell'IR-spazio vettoriale V_3, nel quale ogni vettore è indicato mediante le sue coordinate risetto a una base ortonormale sono assegnati i due vettori $\vec{v} = (1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (0, -1, 2)$.

1. Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ per $W = L\{\vec{v}, \vec{w}\}$.
2. In W, determinare le coordinate di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
3. Completare i due vettori di $\mathcal{B}$ a base ortonormale $\mathcal{B}_1$ per V_3.

---

1. *Cerchiamo innanzitutto una base ortogonale: come primo vettore possiamo scegliere $\vec{v}$. Il secondo vettore sarà un vettore del tipo $a\vec{v} + b\vec{w} = a(1, 1, 0) + b(0, -1, 2) = (a, a - b, 2b)$ ortogonale a $\vec{v}$, cioè tale che* $(a, a - b, 2b) \cdot (1, 1, 0) = 0 \qquad a \cdot 1 + (a - b) \cdot 1 + 2b \cdot 0 = 0 \qquad 2a - b = 0$
   Per esempio per $a = 1$ e $b = 2$ otteniamo il vettore $(1, -1, 4)$.
   Una base ortogonale per W è quindi $(1, 1, 0), (1, -1, 4)$.
   Una base ortonormale è $\mathcal{B}$: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)\ ,\ \dfrac{1}{\sqrt{18}}(1, -1, 4)$

2. *Occorre esprimere $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$:*
   Si ha evidentemente $\vec{v} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)\right) + 0\left(\dfrac{1}{\sqrt{18}}(1, -1, 4)\right)$, quindi le coordinate di $\vec{v}$ sono $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

   Per quanto riguarda $\vec{w}$, scriviamo $(0, -1, 2) = a\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)\right) + b\left(\dfrac{1}{\sqrt{18}}(1, -1, 4)\right)$ il che porta al sistema lineare 3×2 nelle incognite a, b:

   $$\begin{cases} (1/\sqrt{2})a & +(1/\sqrt{18})b & = & 0 \\ (1/\sqrt{2})a & -(1/\sqrt{18})b & = & -1 \\ 0 \cdot a & +(4/\sqrt{18})b & = & 2 \end{cases}$$

   Sapendo che il sistema ha una soluzione (le coordinate rispetto a una base sono uniche), si ricava subito dall'ultima equazione $b = \sqrt{18}/2$ e quindi dalla prima $a = -\sqrt{2}/2$, quindi le coordinate di $\vec{w}$ sono $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{18}/2 \end{pmatrix}$

3. *Occorre cercare un terzo vettore di V_3 ortogonale a entrambi. Sia esso (x, y, z). Si ha:*

   $$\begin{cases} (x, y, z) \cdot (1, 1, 0) & = & 0 \\ (x, y, z) \cdot (0, -1, 2) & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y & = & 0 \\ -y + 2z & = & 0 \end{cases}$$

   Le soluzioni sono $(-2z, 2z, z)$. Per esempio scegliamo $(-2, 2, 1)$. Per averlo di modulo 1 lo si normalizza, quindi la base $\mathcal{B}_1$ è

   $$\mathcal{B}_1 : \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)\ ,\ \frac{1}{\sqrt{18}}(1, -1, 4)\ ,\ \frac{1}{3}(-2, 2, 1)$$