COGNOME ______________________ NOME ______________________

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 9 dicembre 2001

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle seguenti domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

nti 12 $\boxed{\mathcal{A}}$ Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita come:
$f(x,y,z) = (5x+2y-3z\ ,\ 3y\ ,\ 2x+2y)$

1. Scrivere la matrice A associata a f tramite la base canonica.
2. Dire perché A è diagonalizzabile e determinare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $AP = PD$.

La matrice associata si può scrivere semplicemente attrverso i coefficienti delle tre forme lineari che definiscono f ed è $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$P(x) = \det \begin{pmatrix} 5-x & 2 & -3 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 2 & 2 & -x \end{pmatrix} = (3-x)\det \begin{pmatrix} 5-x & -3 \\ 2 & -x \end{pmatrix} = (3-x)(x^2-5x+6)$$

Gli autovalori sono quindi: $\begin{cases} \lambda_1 = 3 \quad \textit{molteplicità: } 2 \quad 1 \le \dim(V_3) \le 2 \quad \Rightarrow \quad \dim(V_3) = 1,2 \\ \lambda_2 = 2 \quad \textit{molteplicità: } 1 \quad 1 \le \dim(V_2) \le 1 \quad \Rightarrow \quad \dim(V_2) = 1 \end{cases}$

Per dimostrare che f è semplice occorre verificare che $\dim(V_3) = 2$.

$\boxed{\lambda_1 = 3}$

Calcoliamo le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Evidentemente il sistema ha ∞^2 soluzioni dipendenti da y e z . Le soluzioni sono $\left(\frac{-2y+3z}{2}\ ,\ y\ ,\ z\right)$ *che si scrivono anche come:* $\quad y(-1,1,0) + z(3/2,0,1)$

Quindi i due vettori $(-1,1,0)$, $(3,0,2)$ costituiscono una base per V_3 che ha dimensione 2.

Possiamo ora concludere che f è semplice e A è diagonalizzabile.

$\boxed{\lambda_2 = 2}$

Per quanto riguarda $\lambda_2 = 2$, occorrono le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - 2I$ che saranno senz'altro ∞^1:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - (2/3)R_1 \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono ora evidenti e sono $(z,0,z)$. Una base per V_2 è quindi $(1,0,1)$.
Una base di autovettori è pertanto:

$$(-1,1,0)\ ,\ (3,0,2)\ ,\ (1,0,1)$$

P e D si ricavano immediatamente dai risultati precedenti e sono:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

nti 12 $\boxed{\mathcal{B}}$ Date le quattro condizioni a lato. Scegliere $v, w \in \mathbb{R}^4$ in modo che le quattro condizioni definiscano un'unica f lineare un cui autovalore sia -2 .
Dire poi se questa f è diagonalizzabile.

$$\begin{aligned} f(1,2,0,0) &= (3,6,0,0) \\ f(0,0,1,1) &= (1,0,0,0) \\ f(0,1,0,0) &= (1,2,0,0) \\ f(v) &= w \end{aligned}$$

Affinché esista un'unica f lineare occorre innanzitutto che $(1,2,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0,0),v$ sia una base per $\mathbb{R}^4$ e per questo basta che i vettori siano linearmente indipendenti (dato che sono quattro vettori). Scegliamo perciò un vettore v, che può essere scelto tra quelli della base canonica, in modo che i quattro vettori siano linearmente indipendenti. Per esempio $v = (0,0,0,1)$. I quattro vettori sono linearmente indipendenti perché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Affinché -2 sia autovalore basta porre $f(v) = -2v$. In questo modo l'applicazione è completamente definita.

Per vedere se f è semplice occorre innanzitutto scriverne la matrice associata e per questo basta calcolare:

$f(0,1,0,0) = (1,2,0,0)$ *già noto*
$f(0,0,0,1) = (0,0,0,-2)$ *è stato appena definito*
$f(0,0,1,0) = f(0,0,1,1) - f(0,0,0,1) = (1,0,0,0) - (0,0,0-2) = (1,0,0,2)$
$f(1,0,0,0) = f(1,2,0,0) - 2f(0,1,0,0) = (3,6,0,0) - (2,4,0,0) = (1,2,0,0)$

Quindi la matrice associata è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Calcoliamone il polinomio caratteristico tenendo presente che si tratta di una matrice triangolare superiore a blocchi: $P(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 2 & 2-x \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -x & 0 \\ 2 & -2-x \end{pmatrix} = (x^2 - 3x)(x^2 + 2x)$. *I primi due autovalori sono quindi $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$ entrambi con molteplicità 1. Questi autovalori di molteplicità 1 soddisfano il criterio di diagonalizzabilità.*

Il terzo autovalore è $\lambda_3 = 0$ con molteplicità 2. L'autospazio relativo è $\ker(f)$, ma, dato che la matrice ha caratteristica 3 (il minore 3×3 inquadrato è non nullo), allora $\dim(\ker(f)) = 4 - 3 = 1$, quindi f non è diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathcal{C}}$ Nello spazio nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche destrorse $Oxyz$, sono dati i due punti $P(0,0,1)$ e $Q(3,2,0)$ e il punto $A(2,0,0)$.

punti 5 1. Determinare sulla retta $\overline{PQ}$ un punto M tale che la retta $\overline{MA}$ sia ortogonale all'asse x.

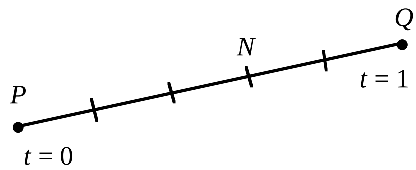
Scriviamo la retta $\overline{PQ}$: $\begin{cases} x = 0 + (3-0)t \\ y = 0 + (2-0)t \\ z = 1 + (0-1)t \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$

La retta $\overline{AM}$ ha vettore direzionale $(2,0,0) - (3t, 2t, 1-t) = (2-3t\,,\,-2t\,,\,-1+t)$. Affinché essa sia ortogonale all'asse x un cui vettore direzionale è $\vec{\imath} = (1,0,0)$, occorre che $(2-3t\,,\,-2t\,,\,-1+t)\cdot(1,0,0) = 0$ cioè che $2 = 3t$ e $t = 2/3$.

Il punto M cercato si otiene dalla retta per $t = 2/3$ ed è perciò: $M\left(2\,,\,\frac{4}{3}\,,\,\frac{1}{3}\right)$

punti 3 2. Determinare sul segmento $\overline{PQ}$ un punto N tale $\dfrac{\text{dist}(PN)}{\text{dist}(QN)} = \dfrac{3}{2}$.

È evidente dalla figura che occorre dividere il segmento PQ in 5 parti uguali. Pertanto il punto N si otterrà dall'equazione segmentaria della retta nella quale P si ottiene per $t = 0$ e Q si ottiene per $t = 1$, ponendo $t = 3/5$.



Quindi si ha: $N = \left(\frac{9}{5}\,,\,\frac{6}{5}\,,\,\frac{2}{5}\right)$