COGNOME ______________________ NOME ______________________

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 8 ottobre 2002

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle seguenti domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

$\boxed{\mathcal{A}}$ Sono dati i sistemi lineari 3×4 seguenti nelle incognite x, y, z, t, dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (k-1)x & +2\,y & -6k\,z & +(k+1)\,t & = & 1 \\ & +(k^2-2k)\,y & +3\,z & +(2k-1)\,t & = & 1 \\ & & +(k^3-k)\,z & +(2k+2)\,t & = & 2 \end{cases}$$

1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ scrivere la matrice completa associata al sistema e dire se la matrice è ridotta, in caso contrario determinare una matrice ridotta equivalente specificando le operazioni elementari usate.
2. Dire per ogni $k \in \mathbb{R}$ se il sistema ha soluzioni e quante.
3. Nei casi $k = 0, 1, 2$ determinare <u>tutte</u> le soluzioni (se ce ne sono).
4. Dire se esistono $k \in \mathbb{R}$ per i quali la quaterna $(0, 0, 0, 1)$ è soluzione del sistema.

Continuare nella pagina successiva, se necessario.

La matrice completa del sistema è: $\left(\begin{array}{cccc|c} k-1 & 2 & -6k & k+1 & 1 \\ 0 & k^2-2k & 3 & 2k-1 & 1 \\ 0 & 0 & k^3-k & 2k+2 & 2 \end{array}\right)$

I possibili pivot della matrice sono $k-1$, k^2-2k , k^3-k.
Il primo è nullo se $k = 1$, *il secondo se* $k = 0, 2$, *il terzo se* $k(k^2-1) = 0$, *cioè se* $k = 0, 1, -1$.
In conclusione, se $k \neq 0, 1, 2, -1$ *la matrice è ridotta con tre pivot non nella colonna dei termini noti,. Il sistema ha* 4 *incognite e tre pivot, quindi ha* ∞^{4-3} *soluzioni, dipendenti dall'incognita non pivotale* t.

Esaminiamo ora i quattro casi particolari:

$\boxed{k=0}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$ *La matrice è anche in questo caso ridotta con tre pivot. Il sistema ha* ∞^1 *soluzioni che dipendono dall'incognita non pivotale* y:

$\begin{cases} -x+2y+t & = & 1 \\ 3z-t & = & 1 \\ 2t & = & 2 \end{cases}$ *per cui le soluzioni sono* $(2y\ ,\ y\ ,\ 2/3\ ,\ 1)$ *al variare di* $y \in \mathbb{R}$.

$\boxed{k=1}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$ *Matrice non ridotta. Si esegue* $R_2 \to R_2 + 1/2 R_1$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$

Infine: $R_3 \to R_3 - 2R_2$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

Il sistema è ora ridotto e non ha soluzioni avendo un pivot tra i termini noti.

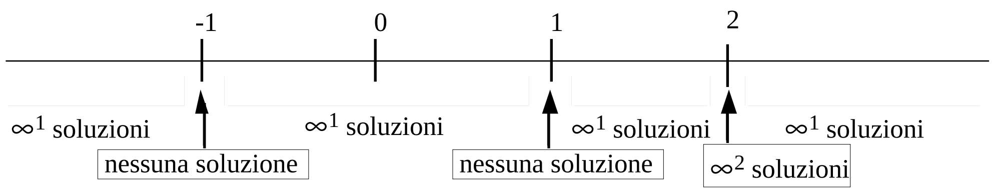
$\boxed{k=2}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -12 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \end{array}\right)$ *Matrice non ridotta. Si esegue* $R_3 \to R_3 - 2R_2$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -12 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

La matrice è ridotta con due pivot. Il sistema ha ∞^2 *soluzioni che dipendono dalle incognite non pivotali* y, t:

$\begin{cases} x+2y-12z+3t & = & 1 \\ 3z+3t & = & 1 \end{cases}$ *per cui le soluzioni sono* $(-2y-15t+5\ ,\ y\ ,\ 1/3-t\ ,\ t)$ *al variare di* $y, t \in \mathbb{R}$

$\boxed{k=-1}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ *La matrice è anche in questo caso ridotta con tre pivot, ma non ha soluzioni avendo un pivot tra i termini noti.*

La situazione può essere sintetizzata in questo schema:



Per vedere se $(0,0,0,1)$ *è soluzione, basta sostituire la quaterna nel sistema:*
$\begin{cases} k+1 &= 1 \\ 2k-1 &= 1 \\ 2k+2 &= 2 \end{cases}$ *ovvero* $\begin{cases} k &= 0 \\ k &= 1 \\ k &= 0 \end{cases}$ *Quindi la quaterna non soddisfa il sistema per nessun* $k \in \mathbb{R}$*, dato che questo comporterebbe* $k = 0 = 1$.

$\boxed{\mathcal{B}}$ *Dato il sistema lineare* 4×4 *associato alla matrice a lato, eseguire l'algoritmo gaussiano per ridurlo (non necessariamente totalmente) usando la strategia del massimo pivot. Specificare le operazioni elementari usate.*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & -3 & -3/2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Il primo pivot è il 3 *di* R_3*, quindi eseguiamo* $R_1 \leftrightarrow R_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 6 & -3 & -3/2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - (1/3)R_1 \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 6 & 6 & -3 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Il secondo pivot è il -2 *di* R_4*, quindi eseguiamo* $R_2 \leftrightarrow R_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 6 & 6 & -3 & -3/2 \\ 0 & \boxed{-2} & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3/2 \end{array}\right) R_3 \to R_3 + (1/2)R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 6 & 6 & -3 & -3/2 \\ 0 & \boxed{-2} & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3/2 \end{array}\right)$$

Non c'è pivot per la terza colonna, quindi passiamo alla quarta dove come pivot va bene il 2 *di* R_3 *ed eseguiamo* $R_4 \to R_4 - R_3$*:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 6 & 6 & -3 & -3/2 \\ 0 & \boxed{-2} & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

la matrice è ora ridotta con tre pivot e il sistema ha quindi ∞^1 *soluzioni dipendenti da un'incognita non pivotale, la terza.*