COGNOME ______________________________ NOME ______________________________

Terzo compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 11 novembre 2002

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle seguenti domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte. **Grafici e disegni dovranno essere chiari e non ambigui.**

punti 13 $\mathcal{A}$ È dato il numero complesso $\alpha = \dfrac{-\sqrt{3}-i}{(1+i)(1-i)}$

- punti 2 — 1. Scrivere α in forma esponenziale.
- punti 3 — 2. Disegnare nel piano di Gauss il numero α^5
- punti 2 — 3. Disegnare nel piano di Gauss il numero α^{-1}
- punti 6 — 4. Disegnare nel piano di Gauss tutti i numeri complessi x tali che $x^5 = \alpha$, $\mathrm{Im}\,(x) < 0$ e $\mathrm{Re}\,(x) > 0$.

---

1. *Si ha:* $\alpha = \dfrac{-\sqrt{3}-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{-\sqrt{3}-i}{(1-i^2)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$

   Quindi: $|\,\alpha\,| = \sqrt{\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}} = 1 \qquad \begin{cases}\cos(\theta) = -\sqrt{3}/2\\ \sin(\theta) = -1/2\end{cases} \qquad \theta = -5\pi/6 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\alpha = 1 \cdot e^{-5\pi i/6}$$

2. *Si ha:* $\alpha^5 = 1^5 \cdot e^{-25\pi i/6}$

   Osserviamo che: $-\dfrac{25\pi}{6} = -\dfrac{24\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = -4\pi - \dfrac{\pi}{6}$*, per cui un argomento di* α^5 *è anche* $-\pi/6$*, mentre il modulo è* 1*. Questo basta per disegnarlo.*

3. *Si ha:* $\alpha^{-1} = 1^{-1} \cdot e^{5\pi i/6}$*. Questo basta per disegnarlo.*

4. *Le radici quinte di* α *hanno modulo* $\sqrt[5]{1} = 1$ *e argomento*

$$-\frac{5\pi}{5\cdot 6} + \frac{2k\pi}{5} = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

I numeri complessi con parte reale positiva e parte immaginaria negativa sono quelli situati nel quarto quadrante del piano di Argand-Gauss.

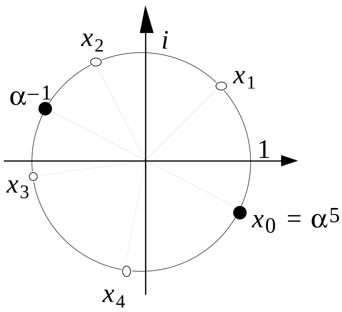
Per $k = 0$ *si ha* x_0 *che ha argomento* $-\pi/6$*,*
per cui x_0 *è nel quarto quadrante.*

Per $k = 1$ *si ha* x_1 *che ha argomento* $-\pi/6 + 2\pi/5 = 7\pi/30 < \pi/2$*,*
per cui x_1 *è nel primo quadrante.*

Per $k = 2$ *si ha* x_2 *che ha argomento* $-\pi/6 + 4\pi/5 = 19\pi/30 < \pi$*,*
per cui x_2 *è nel secondo quadrante.*

Per $k = 3$ *si ha* x_3 *che ha argomento* $-\pi/6 + 6\pi/5 = 31\pi/30 \simeq \pi$*,*
per cui x_3 *è nel terzo quadrante.*

Per $k = 4$ *si ha* x_4 *che ha argomento* $-\pi/6 + 8\pi/5 = 43\pi/30 < 3\pi/2$*,*
per cui x_3 *è nel terzo quadrante.*



Quindi l'unica radice da disegnare è $x_0 = e^{-\pi i/6}$ *che coincide con* α^5*.*

---

punti 4 $\mathcal{B}$ Scrivere un polinomio $P(x)$ a coefficienti reali avente tra le sue radici tutte quelle del polinomio a coefficienti complessi $(x^{10} - ix^9)(x-2+i)^3$, ma tutte di molteplicità 1.

Il polinomio dato è $x^9(x-i)(x-2+i)^3$*, quindi le sue radici sono* $0\ ,\ i\ ,\ 2-i$*.*
Un polinomio a coefficienti reali deve avere come radici anche le coniugate, quindi le radici del polinomio $P(x)$ *saranno* $0\ ,\ i\ ,\ -i\ ,\ 2-i\ ,\ 2+i$*. Il polinomio cercato può essere:*

$$P(x) = x(x-i)(x+i)(x-2+i)(x-2-i) = x(x^2+1)(x^2-4x+5)$$

punti 15 | $\mathcal{C}$ Nell'IR-spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ è dato il sottospazio
$W = L\{(1,0,0,0),(1,0,-1,-1),(2,1,0,1),(0,1,2,3)\}$

punti 6 | 1. Dire che dimensione ha W e perché e scriverne una base.
punti 4 | 2. Dire se $(0,0,1,0) \in W$ e perché.
punti 5 | 3. Dire se in W ci sono vettori $w \neq 0$ con la prima e la quarta coordinata nulla e perché.

---

1. *Per definizione i quattro vettori* $(1,0,0,0),(1,0,-1,-1),(2,1,0,1),(0,1,2,3)$ *sono un sistema di generatori per* W*. controlliamo se sono anche linearmente indipendenti.*
Calcoliamo la caratteristica della matrice delle loro coordinate riducendola
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} R_2 \leftrightarrow R_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} R_4 \rightarrow R_4 - R_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Eliminando R_4 *identica a* R_3*, si vede che la caratteristica è* 3 *e i* 4 *vettori sono linearmente dipendenti. Occorre scartare un vettore che sia combinazione lineare degli altri. Dato che nella matrice si può ricavare un minore di ordine* 3 *non nullo dalle prime tre colonne, ne segue che è possibile scartare il quarto vettore, quindi una base è*
$$\mathcal{B} : (1,0,0,0),(1,0,-1,-1),(2,1,0,1)$$
e la dimensione è 3*.*

2. *Occorre vedere se esistono* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tali che* $x(1,0,0,0) + y(1,0,-1,-1) + z(2,1,0,1) = (0,0,1,0)$*, cioè* $(x + y + 2z\ ,\ z\ ,\ -y\ ,\ -y + z) = (0,0,1,0)$*, ovvero se ha soluzioni il sistema associato alla matrice*
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
Dato che il determinante della matrice 4×4 *è diverso da* 0*, allora la caratteristica della matrice completa è* 4*, mentre quella della matrice dei coefficienti non può essere più di* 3*, quindi il sistema non ha soluzioni e pertanto* $(0,0,1,0) \notin W$*.*

3. *I vettori di* W *sono le combinazioni lineari di* $(1,0,0,0),(1,0,-1,-1),(2,1,0,1)$*, cioè sono*
$$x(1,0,0,0) + y(1,0,-1,-1) + z(2,1,0,1) = (x + y + 2z\ ,\ z\ ,\ -y\ ,\ -y + z)$$
Per avere prima e quarta coordinata nulla occorre che $x + y + 2z = 0$ *e* $-y + z = 0$*, cioè che abbia soluzioni non banali il sistema lineare* $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$ *Il sistema è ridotto con due pivot. ha quindi sicuramente soluzioni non nulle, pertanto esistono vettori* $w \neq 0$ *con le proprietà richieste.*