Cognome ______________________ Nome ______________________

Sesto compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 20 dicembre 2002

Testo di due facciate. Scrivere le risposte alle domande negli appositi spazi con giustificazioni brevi ma esaurienti.

$\mathcal{A}$ punti 4 1. Definire una qualunque applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:
$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$ 2 sia uno degli autovalori.

punti 3 2. Dire se f è diagonalizzabile e perché .

---

1. *Lo spazio* $\ker(f)$ *ha dimensione* 2 *dato che l'equazione ha* ∞^2 *soluzioni e una sua base è per esempio* $(0, 2, 1), (2, 0, 1)$. *Per definire l'applicazione occorre una base di* $\mathbb{R}^3$ *che si può ottenere completando* $(0, 2, 1), (2, 0, 1)$ *a base per esempio con* $(0, 0, 1)$.
   L'applicazione si può definire quindi così: $\begin{array}{l} f(0,2,1) = (0,0,0) \\ f(2,0,1) = (0,0,0) \\ f(0,0,1) = (0,0,2) \end{array}$

2. *L'applicazione è diagonalizzabile per definizione perché la base su cui è definita è una base di autovettori.*

$\mathcal{B}$ punti 7 Calcolare A^{97} con $A = \begin{pmatrix} i & 4+4i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

La matrice A *ha autovalori* i *e* -1, *quindi è diagonalizzabile.*

Gli autovettori sono:
Per $\lambda = i$ *un autovettore è* $(1, 0)$
Per $\lambda = -1$ *un autovettore è* $(4, -1)$

Quindi la diagonalizzazione di A *è* $P^{-1}AP = D$ *con:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P$$

Si ha $A^{97} = PD^{97}P^{-1}$ *Calcoliamo* $D^{97} = \begin{pmatrix} i^{97} & 0 \\ 0 & -1^{97} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Dato che $D^{97} = D$, *anche* $A^{97} = A$.

$\boxed{\mathcal{C}}$ Sono date le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associate alla matrice A tramite la base canonica e dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & k \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

punti 3 1. Scrivere il polinomio caratteristico di f e determinare tutti gli autovalori di f.

$P_f(x) = [(2-x)(2-x)-4] \cdot [(5-x)(2-x)+2] = (x^2-4x) \cdot (x^2-7x+12)$
Le radici del polinomo caratteristico sono pertanto $0, 4, 4, 3$ *e quindi gli autovalori sono:*
$\lambda_1 = 0$ *con molteplicità* 1 $\quad \lambda_2 = 3$ *con molteplicità* 1 $\quad \lambda_3 = 4$ *con molteplicità* 2.

---

punti 5 2. Dire per quale $k \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile e perché.

Dato che il polinomio caratteristico ha 4 *radici reali (contandole con la loro molteplicità), occorre per la seconda condizione del criterio di diagonalizzabilità che per ogni autovalore* $\dim(V_\lambda) =$ *molt*(λ). *La condizione è verificata per i due autovalori di molteplicità* 1, *quindi basta verificarla per* $\lambda_3 = 4$: *Calcoliamo* V_4 *riducendo la matrice* $A - 4I$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k+4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_3 \leftrightarrow R_4 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k+4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si vede quindi che il sistema ha ∞^2 *soluzioni solo se* $k = -4$. *Quindi per questo* k *la matrice è diagonalizzabile.*

---

punti 1 3. Per il k determinato calcolare, completando al posto dei puntini, $f(4\,, -8\,, 3\,, 6) = (12\,, \mathbf{-24}\,, 9\,, 18)$.
[Questa non è una domanda, è un aiuto]

punti 6 4. Per il k determinato sopra scrivere una base di autovettori per f.

Possiamo ricavare subito gli autovettori per $\lambda = 4$ *dato che abbiamo ridotto la matrice* $A - 4I$:
Il sistema ridotto è: $\begin{cases} -2x + y + 2t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$ *Le soluzioni sono* $(y/2 + t\,,\ y\,,\ t\,,\ t)$. *Una base per* V_4 *è* $(1,2,0,0), (1,0,1,1)$.

Per quanto riguarda $\lambda = 3$ *un autovettore si ricava dal punto precedente ed è* $(4,-8,3,6)$.

Per determinare V_0 *riduciamo* $A - 0I = A$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2/5R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 12/5 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che $t = 0$ *e quindi* $z = 0$ *e quindi* $2x + y = 0$.
Una base per V_0 *è* $(1,-2,0,0)$.

Una base di autovettori è quindi: $(1,2,0,0), (1,0,1,1), (4,-8,3,6), (1,-2,0,0)$.

---

punti 3 5. Sempre per il k, scrivere due matrici P e D (P invertibile, D diagonale) tali che $P^{-1}AP = D$.
1mm Le due matrici si ricavano subito dai conti predenti e sono:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$