COGNOME ______________________ NOME ______________________

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 7 ottobre 2003

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle seguenti domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

$\boxed{\mathcal{A}}$ Sono dati i sistemi lineari 3×4 seguenti nelle incognite x, y, z, t, dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$ le cui matrici dei coefficienti e dei termini noti sono rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & k \\ 1 & k+2 & 3-k & k-1 \\ 2 & 2 & k^2-3k & 3k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ k-1 \end{pmatrix}$

1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ scrivere la matrice completa associata al sistema e determinare una matrice ridotta equivalente specificando le operazioni elementari usate.
2. Dire per ogni $k \in \mathbb{R}$ se il sistema ha soluzioni e quante.
3. Nei casi $k = -1, 3, 0$ determinare tutte le soluzioni (se ce ne sono).
4. Dire se esistono $k \in \mathbb{R}$ per i quali la quaterna $(2, -2, 0, 0)$ è soluzione del sistema.

Continuare nella pagina successiva, se necessario.

La matrice completa del sistema è: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & k & 0 \\ 1 & k+2 & 3-k & k-1 & -2 \\ 2 & 2 & k^2-3k & 3k & k-1 \end{array}\right)$

Occorre l'algoritmo di Gauss per ridurre la matrice: $\begin{array}{c} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & k+1 & 3-k & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k^2-3k & k & k-1 \end{array}\right)$

La matrice è ora ridotta purché siano non nulli i possibili pivot della matrice e cioè 1 , $k+1$, k^2-3k.
Il secondo è nullo se $k = -1$, *il terzo se* $k^2 - 3k = 0$, *cioè se* $k = 0, 3$.
In conclusione, se $k \neq -1, 0, 3$ *la matrice è ridotta con tre pivot non nella colonna dei termini noti. In questi casi il sistema ha* 4 *incognite e tre pivot, quindi ha* ∞^{4-3} *soluzioni, dipendenti dall'incognita non pivotale* t.

Esaminiamo ora i tre casi particolari, per vedere se la matrice è ridotta e stabilire il numero di soluzioni.

$\boxed{k=-1}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right)$ *La matrice non è ridotta, ma con* $R_3 \to R_3 - R_2$ *la terza riga si annulla e la matrice diventa ridotta con due pivot.*

Il sistema ha ∞^2 *soluzioni che dipendono dalle incognite non pivotali* y *e* t

$\begin{cases} x + y - t = 0 \\ 4z - t = -2 \end{cases}$ *Le soluzioni sono* $\left(-y+t\ ,\ y\ ,\ \dfrac{t-2}{4}\ ,\ t\right)$ *al variare di* $y, t \in \mathbb{R}$.

$\boxed{k=0}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

Matrice ridotta, ma un pivot è tra i termini noti per cui il sistema non ha soluzioni.

$\boxed{k=3}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$

Matrice ridotta con tre pivot. Il sistema ha ∞^1 *soluzioni che dipendono dall'incognita non pivotale* z:

Il sistema è : $\begin{cases} x + y + 3t = 0 \\ 4y - t = -2 \\ 3t = 2 \end{cases}$ *e le soluzioni sono quindi* $\left(-\dfrac{5}{3}\ ,\ -\dfrac{1}{3}\ ,\ z\ ,\ \dfrac{2}{3}\right)$

Per vedere se $(2,-2,0,0)$ *è soluzione, basta sostituire la quaterna nel sistema:*

$$\begin{cases} 2-2 &= 0 \\ 2-2(k+2) &= -2 \\ 4-4 &= k-1 \end{cases} \quad \textit{ovvero} \quad \begin{cases} 0 &= 0 \\ k &= 0 \\ k &= 1 \end{cases}$$

Quindi la quaterna non soddisfa il sistema per nessun $k \in \mathbb{R}$*, dato che questo comporterebbe* $k = 0 = 1$.

$\boxed{\mathcal{B}}$ Dato il sistema lineare omogeneo 3×5 a lato a lato nelle incognite x, y, z, t, u

$$\begin{cases} x \quad + z - t \qquad = 0 \\ \quad y + 3z \qquad + u = 0 \\ x + y + 4z - t + 4u = 0 \end{cases}$$

1. Eseguire l'algoritmo di Gauss diretto e retrogrado per ridurlo totalmente. Specificare le operazioni elementari usate.
2. Scrivere tutte le soluzioni come combinazione lineare di soluzioni di base.

Riduciamo la matrice dei coefficienti del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice è ridotta con tre pivot, quindi ci sono ∞^2 *soluzioni. La riduzione totale è quasi immediata:*

$$\begin{matrix} R_3 \to (1/3)R_3 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono quindi dipendenti da t *e* z

$$(-z+t\ ,\ -3z\ ,\ z\ ,\ t\ ,\ 0) = z(-1,-3,1,0,0) + t(1,0,0,1,0)$$