COGNOME ______________________________ NOME ______________________________

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 21 ottobre 2003

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle seguenti domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

punti 12 $\boxed{\mathcal{A}}$ Sono dati le equazioni matriciali $A \cdot x = b$ nell'incognita $x \in M_{31}(\mathbb{R})$, dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$. Dire per ogni $k \in \mathbb{R}$ se l'equazione ha soluzioni e quante.

$$A = \begin{pmatrix} 2-k & 0 & 1 \\ k-2 & 1-k & k-1 \\ k^2 & 1-k & 2k \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dato che la riduzione gaussiana del sistema presenta difficltà, conviene calcolare il determinante di A per studiarne la caratteristica. Conviene effettuare qualche operazione elementare per semplificare il calcolo.

$$\det(A) \overset{R_3 \to R_3 - R_2}{=} \det \begin{pmatrix} 2-k & 0 & 1 \\ k-2 & 1-k & k-1 \\ k^2-k+2 & 0 & k+1 \end{pmatrix} = (1-k)\det\begin{pmatrix} 2-k & 1 \\ k^2-k+2 & k+1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1-k)\left((2-k)(k+1) - (k^2-k+2)\right) = (1-k)(-2k^2+2k) = (1-k)(-2k)(k-1)$$

Quindi il determinante si annulla per $k = 0, 1$.

Si conclude che: Per $k \neq 0, 1$ il sistema è un sistema di Cramer con 1 e 1 sola soluzione. Esaminiamo i due casi particolari:

$\boxed{k=0}$

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) R_3 \to R_3 - R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Per cui, se $k = 0$ il sistema non ha soluzioni.

$\boxed{k=1}$

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) R_3 \to R_3 - +R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Per cui, se $k = 1$ il sistema ha due pivot e quindi ∞^1 soluzioni.

---

punti 8 $\boxed{\mathcal{B}}$ Dimostrare che la matrice A ha caratteristica 3 usando la definizione intrinseca (quella coi minori).

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Un minore di ordine 3 non nullo è per esempio il det *della sottomatrice 3×3 inquadrata.*

Per quanto riguarda i minori di ordine 4 ce ne sono 5:

Escludendo C_1 si ottiene una matrice 4×4 con determinante (sviluppo lungo l'ultima riga)

$$3\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot (1 \cdot (4(-1) - 2 \cdot 1) - 2(1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1)) = 3 \cdot (6 - 6) = 0$$

Escludendo C_2 si ottiene una matrice 4×4 con due colonne uguali e quindi con det 0.

Escludendo C_3 si ottiene una matrice 4×4 con due colonne uguali e quindi con det 0.

Escludendo C_4 si ottiene una matrice 4×4 con due colonne uguali e quindi con det 0.

Escludendo C_5 si ottiene una matrice 4×4 con determinante (sviluppo lungo l'ultima riga)

$$-3\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ (stesso di sopra).}$$

Quindi esiste un minore di ordine 3 non nullo e tutti i minori di ordine 4 sono nulli.

$\boxed{\mathcal{C}}$ In $M_{nn}(\mathbb{R})$ sono date A, B matrici, B invertibile.

punti 4 1. Dare una condizione perché l'equazione $AX + X = B^{-1}$ nell'incognita $X \in M_{nn}(\mathbb{R})$ abbia una soluzione e dare un'espressione per la soluzione.

Si ha: $AX + IX = B^{-1}$ $(A+I)X = B^{-1}$. *Sotto la condizione che* $A+I$ *sia invertibile si ha:* $(A+I)^{-1}(A+I)X = (A+I)^{-1}B^{-1}$ *da cui* $X = (A+I)^{-1}B^{-1}$.

punti 4 2. Calcolare esplicitamente X nel caso che $n = 4$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Invertiamo $A+I$*:*

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&4&0&1 & 1 & & & \\ 0&2&0&0 & & 1 & & \\ 0&0&1&0 & & & 1 & \\ 0&0&0&1 & & & & 1 \end{array}\right) R_2 \to (1/2)R_2 \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&4&0&1 & 1 & & & \\ 0&1&0&0 & & 1/2 & & \\ 0&0&1&0 & & & 1 & \\ 0&0&0&1 & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 \to R_1 - R_4 \\ R_1 \to R_1 - 4R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&4&0&1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0&1&0&0 & & 1/2 & & \\ 0&0&1&0 & & & 1 & \\ 0&0&0&1 & & & & 1 \end{array}\right)$$

L'inversa di B *è immediata.*
In definitiva:

$$X = (A+I)^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & & -1 \\ & 1/2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/3 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 1 \\ & 1/6 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

punti 8 $\boxed{\mathcal{D}}$ Dire quali colonne di A sono combinazione lineare delle altre e quali non lo sono. In caso affermativo scrivere la combinazione. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Per vedere se C_4 *lo è scriviamo* $aC_1 + bC_2 + cC_3 = C_4$
Questo è un sistema la cui matrice completa (coeff. e termini noti) è proprio A *che è già ridotta.*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Il sistema lineare associato alla matrice si risolve subito e la soluzione è $c = -1$; $b = 0$; $a = 4$
Quindi: $4C_1 - C_3 = C_4$ *da cui anche* $C_3 = C_4 + 4C_1$ *e* $C_1 = 1/4C_3 + 1/4C_4$

Invece C_2 *non è combinazione lineare delle altre colonne: infatti* $aC_1 + bC_3 + cC_4 = C_2$ *è associato alla matrice*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \textit{Riducendo con} \\ R_3 \to R_3 + R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \textit{ e quindi non ci sono soluzioni.}$$

Si poteva anche osservare che in tutte le altre colonne la seconda componente è l'opposta della terza, cosa che non succede in C_2.