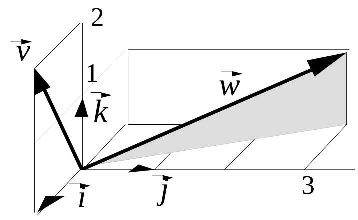
COGNOME ______________________ NOME ______________________

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 25 novembre 2003

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle seguenti domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

punti 14 $\mathcal{A}$ Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale V_3, nel quale è stata fissata una base ortonormale $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, sono dati i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ rappresentati dai segmenti orientati disegnati. Sia poi $W = L\{\vec{v}, \vec{w}\}$ il sottospazio vettoriale da essi generato.



3 1. Calcolare l'angolo θ tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$ o almeno il suo coseno.
4 2. Scrivere le coordinate di un vettore $\vec{u} \in W$ e ortogonale a $\vec{\jmath}$.
4 3. Completare $\vec{u}$ a base ortogonale di W.
3 4. Completare $\vec{u}$ a base ortogonale di V_3.

Dalla figura si vede che $\vec{v} = (1, 0, 2)$ *e* $\vec{w} = (-1, 3, 1)$.

1. *Si ha:* $|\,\vec{v}\,| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ $\quad |\,\vec{w}\,| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

   $\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 1$, *quindi:* $\quad \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{55}}$.

   Volendo proseguire il conto mediante calcolatrice:
   $\cos(\theta) \simeq 0.135$, *da cui* $\theta \simeq 1.436$ *(in radianti) o* $\theta \simeq 82^\circ$ *(in gradi).*

2. *I vettori di* W *sono tutte le combinazioni lineari di* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *cioè i vettori del tipo*

$$a\vec{v} + b\vec{w} = a(1, 0, 2) + b(-1, 3, 1) = (a - b\ ,\ 3b\ ,\ 2a + b)$$

   Imponiamo l'ortogonalità con $\vec{k} = (0, 0, 1)$:

$$(a - b\ ,\ 3b\ ,\ 2a + b) \cdot (0, 0, 1) = 2a + b = 0$$

   Per esmpio con $a = 1$ *e* $b = -2$ *si ha il vettore* $\vec{u} = (3, -6, 0)$.

   Va bene anche $\vec{u} = (1, -2, 0)$ *(multiplo).*

3. *Occorre un vettore di* $\vec{w}$ *ortogonale a* $\vec{u}$. *I vettori di* W *sono tutti i vettori del tipo* $(a - b\ ,\ 3b\ ,\ 2a + b)$, *quindi occorre che*

$$(a - b\ ,\ 3b\ ,\ 2a + b) \cdot (1, -2, 0) = a - b - 6b = a - 7b = 0$$

   Per esempio per $a = 7$ *e* $b = 1$ *si ottiene* $(6, 3, 15)$ *e la base ortogonale di* W *è* $(1, -2, 0)\ ,\ (6, 3, 15)$

4. *Avendo già due vettori ortogonali di* V_3 *ricavati dal precedente conto occorre aggiungerne uno ortogonale a entrambi. Per esempio* $(1, -2, 0) \wedge (6, 3, 15)$:

$$(1, -2, 0) \wedge (6, 3, 15) \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \qquad (-30\ ,\ -15\ ,\ 15)$$

   Come terzo vettore della base va quindi bene il vettore trovato o anche un suo multiplo.

   Se lo dividiamo per 15 *troviamo:* $(1, -2, 0)\ ,\ (6, 3, 15)\ ,\ (-2, -1, 1)$

punti 10 $\boxed{\mathcal{B}}$ Dato il polinomio $P(x) = (x+i)^{19}(x^4+x^2) \in \mathbb{C}[x]$.

$\boxed{2}$ 1. Scrivere tutte le radici di $P(x)$ e dirne la molteplicità.
$\boxed{5}$ 2. Calcolare $P(x)$ per $x = -\sqrt{3}$ e scriverlo in forma esponenziale $re^{i\theta}$ con $-\pi < \theta \leq \pi$
$\boxed{3}$ 3. Scrivere un polinomio $P_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ avente le stesse radici di $P(x)$ con <u>almeno</u> le stesse molteplicità.

---

1. *Si scrive*

$$P(x) = (x+i)^{19}(x^2+x^4) = (x+i)^{19}\ x^2\ (x^2+1) = (x+i)^{19}\ x^2\ (x+i)(x-i)$$

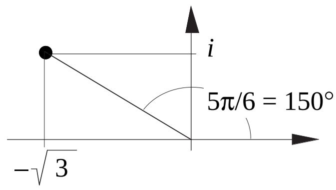
quindi le radici sono:

0	*con molteplicità*	2
$-i$	*con molteplicità*	20
i	*con molteplicità*	1

2. *Si ha:* $P(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3}+i)^{19} \cdot (9+3) = (-\sqrt{3}+i)^{19} \cdot (12)$

Per calcolare $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{19}$ *occorre scrivere* $z_0 = -\sqrt{3}+i$ *in forma esponenziale:*

$\left|-\sqrt{3}+i\right| = 2 \qquad \begin{cases} \cos(\theta) = -\sqrt{3}/2 \\ \sin(\theta) = /2 \end{cases}$ *da cui* $\theta = 5\pi/6$.



D'altra parte $Re(z_0) < 0$ *e* $\operatorname{Im}(z_0) > 0$, *quindi* z_0 *è nel II quadrante.*

Allora $-\sqrt{3}+i = 2 \cdot e^{5\pi i/6}$ *e* $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{19} = 2^{19} \cdot e^{95\pi i/6}$.

Dato che dividendo si ha: $95 = 15{\cdot}6{+}5$, *allora si ha* $2^{19}{\cdot}e^{15\pi i\, +\, 5\pi i/6}$.

L'angolo 15π *è trigonometricamente equivalente a* π, <u>*o meglio a* $-\pi$</u>, *per rimanere nell'intervallo* $(-\pi, \pi]$.
In definitiva $15\pi + 5\pi/6 \equiv -\pi + 5\pi/6 = -\pi i/6$, *quindi*

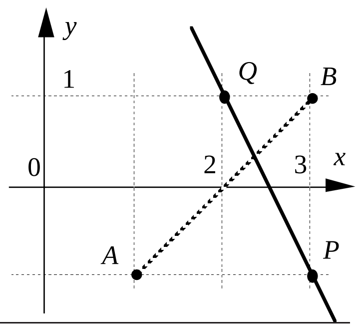
$$\left(-\sqrt{3}+i\right)^{19} = 2^{19} \cdot e^{-\pi i/6}$$

In conclusione

$$P(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3}+i)^{19} \cdot (12) = \left(12 \cdot 2^{19}\right)\ e^{-\pi i/6}$$

3. *Per avere coefficienti reali,* $P_1(x)$ *deve avere per ogni radice la coniugata, quindi occore che anche* $-i$ *abbia molteplicità almeno* 20. *Un polinomio simile è per esempio*

$$P_1(x) = (x+i)^{20}(x-i)^{20}x^2 = (x^2+1)^{20}x^2$$



punti 8 $\boxed{\mathcal{C}}$ Sono dati i punti $P(3,-1)$ e $Q(2,1)$.

$\boxed{3}$ 1. Scrivere una rappresentazione parametrica per la retta $\overline{PQ}$.

$\boxed{5}$ 2. Determinare i due punti X della retta $\overline{PQ}$ tali che il triangolo AXB sia rettangolo in X, cioè tali che XA e XB siano ortogonali (uno dei due punti è evidentemente P). I punti A, B sono: $A = (1,-1)$, $B = (3,1)$

---

1. *Una rappresentazione è* $\begin{cases} x = 3 + t\,(2-3) \\ y = -1 + t\,(1+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

2. *Il punto* X *cercato, essendo un punto di* r *è del tipo* $(3-t\ ,\ -1+2t)$.
I due vettori $X-A$ *e* $X-B$ *devono essere ortogonali, quindi:*
$(X-A) = (3-t-1\ ,\ -1+2t+1) = (2-t\ ,\ 2t)$
$(X-B) = (3-t-3\ ,\ -1+2t-1) = (-t\ ,\ 2t-2)$
$(X-A)\cdot(X-B) = (2-t\ ,\ 2t)\cdot(-t\ ,\ 2t-2) = (2-t)(-t)+2t(2t-2) = -2t+t^2+4t^2-4t = 5t^2-6t$

Si ha $5t^2-6t = 0$ *per* $t_1 = 0$ *e per* $t_2 = 6/5$.
Per $t_1 = 0$ *si ottiene, come previsto il punto* $P(3,-1)$, *per* $t_2 = 6/5$ *si ottiene il punto*

$$X = \left(\frac{9}{5}\ ,\ \frac{7}{5}\right)$$