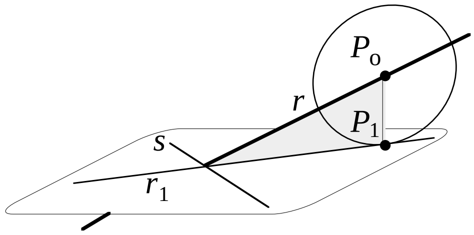
COGNOME ______________________ NOME ______________________

Compito di Geometria
Ingegneria Gestionale
9 dicembre 2003

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle seguenti domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

Nello spazio nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche destrorse $Oxyz$ sono dati la

retta $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2t \\ z = -2+3t \end{cases}$ e il piano $\alpha : 2x - y - 3z = 1$



punti 8 1. Determinare una rappresentazione parametrica per la retta s giacente su α, ortogonale r e incidente r.

La retta cercata, per essere ortogonale a r, dovrà avere vettore direzionale ortogonale al vettore direzionale di r che è $\vec{v} = (0, -2, 3)$ Per giacere su α, dovrà inoltre avere vettore direzionale ortogonale al vettore normale di α che è $\vec{n}_\alpha = (2, -1, -3)$.
Come vettore direzionale di s possiamo dunque scegliere $\vec{v} \wedge \vec{n}_\alpha$:

$$\vec{v} \wedge \vec{n} = (0, -2, 3) \wedge (2, -1, -3) \qquad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad (9\ ,\ 6\ ,\ 4) = \vec{v}_s$$

La retta inoltre dovrà contenere il punto X intersezione tra r e α:

$$2\,(1) - \,(-2t) - 3\,(-2+3t) = 1 \qquad 7 - 7t = 0 \qquad t = 1 \qquad X = (1, -2, 1)$$

La retta s è quindi: $\begin{cases} x = 1 + 9t \\ y = -2 + 6t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

punti 8 2. Determinare il punto P_1 proiezione del punto $P_0(1, 0, -2)$ (punto di r) su α.

La retta che proietta P_0 su α è la retta passante per P_0 e ortogonale α: $p \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$

Per avere P_1 basta intersecare α con la retta proiettante:

$$2(1+2t) - (-t) - 3(-2-3t) = 1 \qquad 7 + 14t = 0 \qquad t = -\frac{1}{2} \qquad P_1 = \left(0\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$$

punti 7 3. Determinare una rappresentazione parametrica per la retta r_1 proiezione della retta r su α.

La retta è semplicemente la retta che passa per X e per P_1:

$$\begin{cases} x = 1 + (0-1)\,t \\ y = -2 + \left(\frac{1}{2}+2\right) t \\ z = 1 + \left(-\frac{1}{2}-1\right) t \end{cases} \quad \text{o, raddoppiando il vettore direzionale,} \quad \begin{cases} x = 1 + -2t \\ y = -2+5t \\ z = 1-3t \end{cases}$$

---

punti 9 4. Determinare una rappresentazione cartesiana per la circonferenza di centro P_0 e tangente a r_1.

Il raggio della circonferenza sarà la distanza tra P_0 e r_1, ovvero tra P_0 e P_1

$$r = \sqrt{(1-0)^2 + \left(0-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-2+\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

Dato che r_1 è tangente, il piano della circonferenza dovrà contenere r_1 e P_0.
Dato che X e P_1 sono punti di r_1, il piano dovrà contenere la retta r che passa per X e P_0 e la retta $\overline{P_0P_1}$, di conseguenza:

- *Il suo vettore normale sarà ortogonale a $(P_0 - P_1)$ cioè a $\vec{n}_\alpha$.*
- *Il suo vettore normale sarà ortogonale al vettore $\vec{v}$ di r.*

Abbiamo già trovato un vettore ortogonale a $\vec{n}_\alpha$ e a $\vec{v}$ e cioè $\vec{v} \wedge \vec{n}_\alpha$, vettore direzionale di s che era (vedi punto 1) $\vec{v}_s = (9\ ,\ 6\ ,\ 4)$, quindi il piano della circonferenza è

$$9(x-1) + 6(y-0) + 4(z+2) = 0 \qquad 9x + 6y + 4z - 1 = 0$$

Come sfera possiamo prendere quella di centro P_0 e raggio $\sqrt{\frac{7}{2}}$, quindi una rappresentazione cartesiana per la circonferenza è

$$\begin{cases} 9x + 6y + 4z - 1 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-0)^2 + (z+2)^2 = 7/2 \end{cases}$$