1

COGNOME ____________________ NOME ____________________ .

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 1 dicembre 2004

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle seguenti domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte. I numeri inquadrati sono i punteggi dei singole domande

Affermazioni del tipo "la dimensione è ..." , "i vettori formano base" vanno giustificate adeguatamente.

$\boxed{6}$ $\boxed{\mathcal{A}}$ In V_3, dove i vettori sono assegnati tramite le coordinate rispetto a una base ortonormale $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, sono dati i tre vettori $\vec{v}_1 = (1,0,3)$ $\quad \vec{v}_2 = (1,1,1)$ $\quad \vec{v}_3 = (0,-1,2)$ $\quad$ e W il sottospazio vettoriale da essi generato.

$\boxed{2}$ 1. Dire che dimensione ha W e perché e scriverne una base $\mathcal{B}$.

$\boxed{5}$ 2. Determinare tutti i vettori $\vec{w} \in W$ tali che $\vec{w} - \vec{\imath}$ sia ortogonale a $\vec{v}_1$.

---

1. *Scriviamo la matrice delle coordinate dei tre vettori e calcoliamone la caratteristica riducendola:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - 3R_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 + 2R_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora è ridotta con due pivot, quindi la caratteristica è 2 *e anche* $\dim(W) = 2$.
Una base la si ottiene scartando uno dei tre generatori, per esempio $\vec{v}_3$.
I due vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ *sono linearmente indipendenti, perché sono* 2 *e non proporzionali, quindi formano base per* W.

2. *I vettori* $\vec{w}$ *di* W *sono le combinazioni lineari di* $\vec{v}_1$ *e* $\vec{v}_2$ *cioè* $\vec{w} = a(1,0,3) + b(1,1,1)$ $a, b \in \mathbb{R}$.
Quindi $\vec{w} - \vec{\imath} = (a+b\ ,\ b\ ,\ 3a+b) - (1,0,0) = (a+b-1\ ,\ b\ ,\ 3a+b)$
Imponiamo l'ortogonalità:
$(a+b-1\ ,\ b\ ,\ 3a+b)\cdot(1,0,3) = 0 \qquad a+b-1+9a+3b = 0 \qquad 10a+4b-1 = 0.$
Le soluzioni dell'equazione lineare in a, b *sono* $(a,b) = \left(\dfrac{1-4b}{10}\ ,\ b\right)$*, da cui si ottengono i vettori*

$$\left(\left(\frac{1-4b}{10}\right) + b\ ,\ b\ ,\ 3\left(\frac{1-4b}{10}\right) + b\right) = \left(\frac{1+6b}{10}\ ,\ b\ ,\ \frac{3-2b}{10}\right)$$

$\boxed{6}$ $\boxed{\mathcal{B}}$ Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$

$\boxed{3}$ 1. Dire perché i tre vettori $\quad (1,1,0,3) \quad , \quad (0,1,1,1) \quad , \quad (2,0,-1,2) \quad$ sono linearmente indipendenti.

$\boxed{3}$ 2. Completare i tre vettori a base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{3}$ 3. Calcolare la matrice delle coordinate di $v = (1,0,0,0)$ rispetto a $\mathcal{B}$

---

1. *Scriviamo la matrice delle coordinate dei tre vettori e calcoliamone la caratteristica riducendola:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

La caratteristica è quindi 3*, perché la sottomatrice delle prime tre righe ha determinante* 1*, quindi sono linearmente indipendenti.*

2. *Basta un vettore della base canonica, per esempio* $(0,0,0,1)$*. I quattro vettori formano base perché sono* 4 *e linearmente indipendenti, dato che*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & \boxed{1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = [R_2 \to R_2 - R_1] = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

3. *Risolviamo il sistema che ha come matrice dei coefficienti la matrice delle coordinate della base* $\mathcal{B}$ *e come termini noti le coordinate di* $(1,0,0,0)$*:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Il sistema è ormai quasi risolto e la soluzione è $(-1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0)$*. Posta in colonna, questa è la matrice delle coordinate.*

$\boxed{\mathcal{C}}$ Nello spazio nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche destrorse $Oxyz$, sono dati i tre punti

$A(2,-3,2) \qquad B(1,0,4) \qquad C(1,-1,2)$

$\boxed{3}$ 1. Dire perché l'angolo $\widehat{ACB}$ è ottuso.

$\boxed{6}$ 2. Determinare il punto P del lato AB del triangolo ABC tale che $\widehat{PCB}$ sia retto, verificando che si tratta di un punto del segmento $\overline{AB}$ e non della retta.

$\boxed{5}$ 3. Dire perché la retta OC (O origine delle coordinate) e la retta AB sono incidenti e determinare il punto comune.

---

1. *L'angolo $\widehat{ACB}$ è l'angolo tra i vettori $(A-C)$ e $(B-C)$. Si ha:*
   $(A-C) = (2,-3,2)-(1,-1,2) = (1,-2,0) \qquad (B-C) = (1,0,4)-(1,-1,2) = (0,1,2)$
   Quindi: $\quad (A-C)\cdot(B-C) = (1,-2,0)\cdot(0,1,2) = -2 < 0$
   Questo basta a provare che l'angolo è ottuso.

2. *Scriviamo la retta $\overline{AB}$:* $\begin{cases} x = & 2 & -t \\ y = & -3 & +3t \\ z = & 2 & +2t \end{cases}$ *Per $t=0$ si ottiene A e per $t=1$ si ottiene B.*
   Il punto P cercato sarà del tipo $P(2-t\ ,\ -3+3t\ ,\ 2+2t)$ e sarà tale che
   $$(P-C)\cdot(B-C) = 0$$
   $$(2-t-1\ ,\ -3+3t+1\ ,\ 2+2t-2)\cdot(0,1,2) = 0 \qquad -2+7t = 0$$
   Cioè P si ottiene per $t = 2/7$ ed è quindi: $P = \left(\frac{12}{7}\,,-\frac{15}{7}\,,\frac{18}{7}\right)$.
   Essendo stato ottenuto con $0 < t < 1$, sicuramente P è nel segmento $\overline{AB}$.

3. *La retta OC è* $\begin{cases} x = & t \\ y = & -t \\ z = & 2t \end{cases}$
   Per verificare se interseca AB uguagliamo le due rapppresentazioni parametriche cambiando però nome al parametro della retta OC.
   $$\begin{cases} 2- \ t = u \\ -3+3t = -u \\ 2+2t = 2u \end{cases} \quad \begin{cases} -t-\ u = -2 \\ 3t+\ u = 3 \\ 2t-2u = -2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -6 \end{array}\right)$$
   Evidentemente il sistema ha una soluzione, dato che le due ultime righe sono proporzionali, quindi le rette sono incidenti. Si ricava $u = 3/2$ che sostituita nella retta OC dà il punto intersezione $\left(\frac{3}{2}\,,-\frac{3}{2}\,,3\right)$