Cognome ______________________ Nome ______________________

C'erano 4 compiti diversi, ma di identica difficoltà; questa è la soluzione di una delle 4 versioni.

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 12 ottobre 2005

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente ogni risposta. I numeri inquadrati sono i punteggi dei singole domande

$\boxed{\mathcal{A}}$ In $M_{33}(\mathbb{R})$ è data la matrice B dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ k & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{4}$ 1. Dire per quali k la matrice B è invertibile e per $k = 0$ determinare esplicitamente B^{-1}.

Sviluppando il determinante di B per esempio lungo C_3 che ha più zeri, si ottiene subito:
$\det(B) = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} k & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3(k-2)$*, quindi B è invertibile se $k \neq 2$.*

Calcoliamo B^{-1}: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) R_1 \leftrightarrow R_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) R_3 \to R_3 - R_2$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) R_3 \to (1/3)R_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right) R_1 \to R_1 - R_3$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right)$ *Con l'ultima operazione $R_1 \to (1/2)R_1$ si ottiene:* $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{4}$ 2. Dare una condizione su A affinché l'equazione matriciale $AX = 2X + B$ abbia soluzione $X \in M_{33}(\mathbb{R})$ (indipendentemente da k) e dare una sua espressione in funzione di A e B.

Scriviamo l'equazione come: $AX - 2IX = B \qquad (A-2I)X = B$. Si vede quindi che, se $A - 2I$ è invertibile, possiamo moltiplicare entrambi i membri **a sinistra** *per $(A-2I)^{-1}$ e ottenere $X = (A-2I)^{-1} \cdot B$*

$\boxed{2}$ 3. Sia B la matrice per $k = 0$. Dimostrare che se $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ l'equazione <u>non ha</u> soluzione.

Dato che $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora $A - 2I$ non è invertibile e quindi A non soddisfa la condizione appena trovata. Questo non vuol dire ancora che l'equazione non abbia soluzione, ma osserviamo che se esistesse X, si avrebbe
$(A-2I)X = B$ *e, calcolando i determinanti:*
$\det\Big((A-2I) \cdot X\Big) = \det(B)$*, da cui* $\det(A-2I) \cdot \det(X) = \det(B)$.
Dato che però $\det(B) \neq 0$ e $\det(A-2I) = 0$, si ha una contraddizione.

$\boxed{3}$ 4. Dire perché se $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $k = 7$ l'equazione ha soluzione e determinarla esplicitamente.

Dato che $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, allora A soddisfa la condizione appena trovata. Si ha subito
$(A-2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ *da cui* $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -7 & -1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathcal{B}}$ Sono dati i sistemi lineari $A\underline{x} = b$ seguenti nell'incognita $\underline{x} = [x\ y\ z\ t]^T$, dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & -k & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-2k & k \\ 2 & 4 & 0 & 2-k \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}$$

$\boxed{7}$ 1. Dire *per ogni* $k \in \mathbb{R}$ se il sistema ha soluzioni e quante.

$\boxed{5}$ 2. Nei casi $k = -1, 0$ determinare *tutte* le soluzioni (se ce ne sono).

$\boxed{3}$ 3. Per $k = 0$ determinare delle soluzioni del sistema in modo che tutte le altre siano combinazione lineare di esse.

$\boxed{2}$ 4. Per $k = 1$ individuare in A un minore di ordine 3 nullo e uno non nullo (indicare le righe e le colonne).

Scriviamo la matrice completa del sistema e iniziamo l'algoritmo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & k+1 & -k & 0 & k \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-2k & k & k \\ 2 & 4 & 0 & 2-k & 2k \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & -k & 0 & k \\ 0 & 0 & k^2-2k & k & k \\ 2 & 4 & 0 & 2-k & 2k \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & -k & 0 & k \\ 0 & 0 & k^2-2k & k & k \\ 0 & 0 & 0 & -k & 2k \end{array}\right)$$

La matrice è ora ridotta nel caso in cui $k+1$, k^2-2k , $-k$ *siano non nulli, cioè se* $k \neq -1, 2, 0$. *Possiamo quindi dire che se* $k \neq -1, 2, 0$, *la matrice ha* 4 *pivot tutti nella matrice dei coefficienti, per cui il sistema ha* 1 *soluzione.*

Esaminiamo ora i tre casi particolari, per vedere se la matrice ottenuta è ridotta e stabilire se ha soluzioni.

$\boxed{k = -1}$ *La matrice non è ridotta, quindi proseguiamo con l'algoritmo gaussiano:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) R_3 \to R_3 - 3R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) R_4 \to R_4 + R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In conclusione, se $k = -1$ *la matrice è ridotta con tre pivot non nella colonna dei termini noti. Il sistema ha* 4 *incognite e tre pivot, quindi ha* ∞^1 *soluzioni, dipendenti dall'incognita non pivotale* y.

Data la semplicità del sistema ridotto è facile determinare immediatamente le soluzioni.

$$\begin{cases} x + 2y + t & = & 0 \\ z & = & -1 \\ t & = & -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x & = & -2y + 2 \\ z & = & -1 \\ t & = & -2 \end{cases}$$ *Le soluzioni sono* $(-2y + 2\ ,\ y\ ,\ -1\ ,\ -2)$ *al variare di* $y \in \mathbb{R}$.

$\boxed{k = 2}$ *La matrice non è ridotta, ma si nota subito che le due ultime equazioni sono* $2t = 2$ *e* $-2t = 4$ *e sono incompatibili, per cui il sistema non ha soluzioni:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$\boxed{k = 0}$ *La matrice è ridotta e le ultime due righe sono nulle, per cui il sistema si riduce a due sole equazioni significative:* $\begin{cases} x + 2y + t & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases}$

Quindi ha due pivot e ∞^2 *soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali* z *e* t: $(-t\ ,\ 0\ ,\ z\ ,\ ,t)$.

Per rispondere alla domanda 3. scriviamo le soluzioni nel seguente modo:
$(-t\ ,\ 0\ ,\ z\ ,\ ,t) = z(0,0,1,0) + t(-1,0,0,1)$.

Quindi $(0,0,1,0)$, $(-1,0,0,1)$ *sono due soluzioni del sistema e tutte le altre sono loro combinazione lineare.*

Poniamo ora $k = 1$ *e scriviamo* A *(che per quanto detto sopra ha caratteristica* 4*).*

Un minore di ordine 3 *nullo è per esempio il determinante della sottomatrice incorniciata nella prima matrice (ottenuta escludendo* R_1 *e* C_4*), che ha due righe proporzionali.*

Un minore di ordine 3 *non nullo è per esempio quello il determinante della sottomatrice incorniciata nella seconda matrice (ottenuta escludendo* R_4 *e* C_4*) che ha determinante* 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$