Cognome ______________________ Nome ______________________

C'erano 4 compiti diversi, ma di identica difficoltà; questa è la soluzione di una delle 4 versioni.

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 9 novembre 2005

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente ogni risposta. I numeri inquadrati sono i punteggi dei singoli domande

$\boxed{\mathcal{A}}$ Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono dati i tre vettori seguenti dipendenti da $k \in \mathbb{R}$

$$v_1 = (\, k-1 \;,\; 0 \;,\; 3 \;,\; k^2-8\,)$$
$$v_2 = (\, k^2+1 \;,\; k \;,\; k^3-1 \;,\; 2k^2+1\,)$$
$$v_3 = (\, 2 \;,\; 0 \;,\; k \;,\; 2k-5\,)$$

$\boxed{5}$ 1. Dire *per ogni* $k \in \mathbb{R}$ se sono linearmente dipendenti o indipendenti.

$\boxed{4}$ 2. Nei casi in cui sono linearmente dipendenti determinare una relazione di dipendenza lineare tra essi.

$\boxed{4}$ 3. Sia $k = 3$. Dire perché in $L\{v_1, v_2, v_3\}$ ci sono vettori non nulli con la prima e la terza componente uguali e determinarne uno.

---

1. *Scriviamo $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. Ne deriva un sistema omogeneo 4×3 in a, b, c la cui matrice dei coefficienti è*

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & k^2+1 & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & k^3-1 & k \\ k^2-8 & 2k^2+1 & 2k-5 \end{pmatrix}$$

Se il sistema ha una sola soluzione, cioè la banale i vettori sono linearmente indipendenti.
Per scoprire ciò occorre calcolare $\varrho(A)$. Poiché la riduzione presenta difficoltà, esaminiamo i minori della matrice.

Guardiamo la sottomatrice formata dalle prime tre righe e calcoliamone il determinante sviluppando lungo R_2:

$$\det \begin{pmatrix} k-1 & k^2+1 & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & k^3-1 & k \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix} = k(k^2-k-6)$$

Il determinante si annulla per $k = 0$, per $k = 3$ e per $k = -2$

Di conseguenza per $k \neq 0, 3, -2$ la matrice ha un minore di ordine 3 non nullo e ha quindi caratteristica 3.

Se $k \neq 0, 3, -2$ i tre vettori sono perciò linearmente indipendenti.

$\boxed{k = 0}$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ *Calcoliamo il determinante della matrice formata dalle tre righe non nulle:* $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & -5 \end{pmatrix} =$

$$= -3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} = -3(-5-2) - (5+16) = 0$$

Di conseguenza l'unico minore significativo di ordine 3 è nullo e $\varrho(A) \neq 3$

Se $k = 0$ i tre vettori sono linearmente dipendenti.

$\boxed{k = 3}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 26 & 3 \\ 1 & 19 & 1 \end{pmatrix}$ *Evidentemente $v_1 = v_3$, quindi*

Se $k = 3$ i tre vettori sono linearmente dipendenti.

$\boxed{k = -2}$ $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \\ -4 & 9 & -9 \end{pmatrix}$ *Calcoliamo il determinante della matrice formata dalle ultime tre righe:* $-2 \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} \neq 0$

Di conseguenza per $k = -2$ la matrice ha un minore di ordine 3 non nullo e ha quindi caratteristica 3.

Se $k = -2$ i tre vettori sono perciò linearmente indipendenti.

---

2. *Per $k = 0$* *Scriviamo $av_1 + bv_2 = v_3$.*
Sapendo già che il sistema ha soluzione possiamo limitarci alle prime due equazioni significative:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 3a - b = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \quad \text{e infatti } v_1 + 3v_2 = v_3.$$

---

2. *Per $k = 3$* *È evidente che $v_1 + 0v_2 = v_3$.*

---

3. *Sia $k = 3$*

I vettori di $L\{v_1, v_2, v_3\}$ sono $a(2, 0, 3, 1) + b(10, 3, 26, 19) = (2a + 10b\ ,\ 3b\ ,\ 3a + 26b\ ,\ a + 19b)$

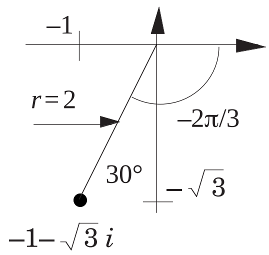
Imponiamo $2a + 10b = 3a + 26b$. Si ha: $a = -16b$.

Per esempio per $a = 16$ e $b = -1$ si ha il vettore $(22, -3, 22, -3)$

I disegni dovranno essere chiari, non ambigui e accompagnati da adeguata spiegazione

7 $\boxed{\mathcal{B}}$ Dato il polinomio a coefficienti complessi $\quad P(x) = x^6 + x^2 + \sqrt{3}\, i\, x^2$
determinarne tutte le radici e la loro molteplicità e disegnarle nel piano di Argand-Gauss.

Si scrive $P(x) = x^2(x^4 + 1 + \sqrt{3}\, i) = 0$.
Una radice è quindi $x_1 = 0$ *con molteplicità* 2.
Risolvere l'equazione $x^4 + 1 + \sqrt{3}\, i = 0$ *cioè* $x^4 = -1 - \sqrt{3}\, i)$
significa determinare le radici quarte di $-i - \sqrt{3}\, i$.
Il numero $-i - \sqrt{3}\, i$ *ha modulo* 2 *e argomento* $-2\pi/3$

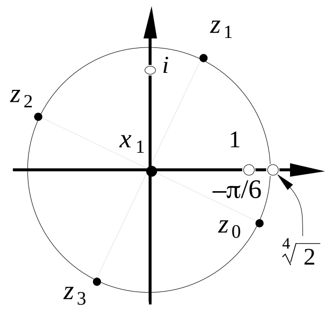


Quindi il numero è $2e^{-2\pi i/3}$
Le sue radici quarte sono notoriamente:

$z_k = \sqrt[4]{2}\, e^{(-\pi/6 + 2k\pi/4)i} \quad k = 0, 1, 2, 3.$
Le soluzioni hanno modulo $\sqrt[4]{2} \simeq 1.18$ *e argomenti* $-\pi/6\ ,\ \pi/3\ ,\ 5\pi/6\ ,\ 4\pi/3$

Le radici di $P(x)$ *sono pertanto*

$z_0 = \sqrt[4]{2}\, e^{-\pi i/6}$ *con molteplicità* 1
$z_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{\pi i/3}$ *con molteplicità* 1
$z_2 = \sqrt[4]{2}\, e^{5\pi i/6}$ *con molteplicità* 1
$z_3 = \sqrt[4]{2}\, e^{4\pi i/3}$ *con molteplicità* 1
$x_1 = 0$ *con molteplicità* 2
da qui il disegno



---

6 $\boxed{\mathcal{C}}$ Dato il polinomio a coefficienti complessi $\quad Q(x) = x^{77} - \alpha$
determinare $\alpha \in \mathbb{C}$ (scritto in forma algebrica) in modo che $1 + i$ sia radice di $Q(x)$

Sia ha $Q(1 + i) = (1 + i)^{77} - \alpha$, *da cui* $\alpha = (1 + i)^{77}$. *Ma* $1 + i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$, *quindi*

$$(1 + i)^{77} = \sqrt{2}^{77} e^{77\pi i/4}$$

Dividiamo 77 *per* 4. *Si ottiene* 19 *col resto di* 1, *cioè*

$$\frac{77}{4} = \frac{19 \cdot 4}{4} + \frac{1}{4} \qquad \frac{77\pi}{4} = 19\pi + \frac{\pi}{4} \qquad \frac{77\pi}{4} \text{ è quindi trigonometricamente equivalente a } \pi + \frac{\pi}{4}$$

Quindi

$$\alpha = (1 + i)^{77} = \sqrt{2}^{77} e^{5\pi i/4} = \sqrt{2}^{77} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\, i}{2} \right) = -2^{38} - 2^{38} i$$

---

4 $\boxed{\mathcal{D}}$ Scrivere un polinomio a coefficienti reali $\quad P_1(x)$ avente $1 + i$ come radice di molteplicità 13 e -3 come radice di molteplicità 17 e decomporlo in fattori reali irriducibili.

Deve avere anche la radice $1 - i$ *con la stessa molteplicità, quindi* $P_1(x) = (x + 3)^{17}(x - 1 - i)^{13}(x - 1 + i)^{13}$.
Si ha:

$$P_1(x) = (x + 3)^{17} \Big((x - 1)^2 - (i)^2 \Big)^{13} \qquad P_1(x) = (x + 3)^{17} \Big(x^2 - 2x + 2 \Big)^{13}$$

Il polinomio $x + 3$ *è irriducibile perché ha grado* 1.
Il polinomio $x^2 - 2x + 2$ *è irriducibile perché ha grado due e non ha radici reali.*
Questa è dunque la decomposizione.