COGNOME ______________________ NOME ______________________

C'erano 4 compiti diversi, ma di identica difficoltà; questa è la soluzione di una delle 4 versioni.

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 30 novembre 2005

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e **giustificando** brevemente ma esaurientemente ogni risposta. I numeretti sono i punteggi dei singoli domande

$\mathcal{A}$ In $\mathbb{R}^4$ sono dati i due sottospazi seguenti

$W_1 = L\{(1,2,0,-1),(2,1,1,0),(0,-3,1,2)\}$ $\qquad$ $W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+3y+z+2t=0\}$

4 1. Determinare la dimensione e una base per W_1 e per W_2

Scriviamo la matrice delle coordinate dei tre vettori che generano W_1 e riduciamola

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \to R_3 + \frac{1}{3}R_2 \\ R_4 \to R_4 + \frac{2}{3}R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice ha caratteristica 2 e pertanto $\dim(W_1) = 2$. Una base di W_1 è data da <u>due</u> suoi vettori linearmente indipendenti, per esempio $(1,2,0,-1),(2,1,1,0)$ che sono linearmente indipendenti, perché <u>due</u> e non proporzionali.

Il sistema lineare che definisce W_2 ha ∞^3 soluzioni e quindi $\dim(W_1) = 3$. Le soluzioni (ovvero tutti i vettori di W_2) sono: $\quad (-3y-z-2t\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ t)$

Si possono scrivere come: $y(-3,1,0,0)+z(-1,0,1,0)+t(-2,0,0,1)$.
Quindi i tre vettori $(-3,1,0,0),(-1,0,1,0),(-2,0,0,1)$ generano W_2. Sono linearmente indipendenti perché la matrice delle loro coordinate ha come sottomatrice I_3 e ha quindi caratteristica 3. Pertanto i tre vettori formano una base per W_2.

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

4 2. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (k,0,2,1)$ appartiene a W_1 e per quale k appartiene a W_2

Per vedere se $v \in W_1$ scriviamo $(k,0,2,1) = a(1,2,0,-1)+b(2,1,1,0)$ e vediamo per quali k il sistema lineare 4×2 in a, b ha soluzioni.

$$\begin{cases} a+2b=k \\ 2a+b=0 \\ b=2 \\ -a=1 \end{cases}$$

Senza effettuare l'algoritmo gaussiano, basta sostituire $b=2$ e $a=-1$ nelle prime due equazioni e ottenere

$$\begin{cases} 3=k \\ 0=0 \\ b=2 \\ -a=1 \end{cases}$$

Per cui si deve avere $k=3$ affinché si abbia $v \in W_1$.

Si ottiene il vettore $v = (3,0,2,1)$

Per vedere se $v \in W_2$ sostituiamo le sue coordinate nell'equazione che definisce W_2;
$k+3\cdot 0+2+2\cdot 1=0$ per cui $k=-5$. Si ottiene il vettore $v=(-5,0,2,1)$

---

4 3. Per ciascuno dei due k trovati, determinare rispettivamente una base per W_1 contenente v e una base per W_2 contenente v.

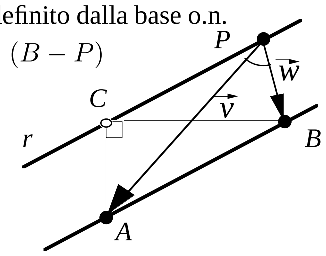
Dato che W_1 ha dimensione 2 ogni sua base è formata da due vettori, quindi basta affiancare a v un qualunque vettore di W_1 non proporzionale a v per esempio $(1,2,0,-1)$
Quindi $(3,0,2,1),(1,2,0,-1)$ è una base di W_1 comprendente v dato che:
1. Sono linearmente indipendenti perché <u>due</u> e non proporzionali.
2. Due vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione 2 ne costituiscono una base.

Dato che W_2 ha dimensione 3 ogni sua base è formata da tre vettori, quindi occorre affiancare a v due vettori di W_2 in modo che i tre vettori siano linearmente indipendenti.
Per esempio proviamo con $(-3,1,0,0),(-1,0,1,0)$
Vediamo se $(-5,0,2,1),(-3,1,0,0),(-1,0,1,0)$ è una base di W_2:
1. Sono linearmente indipendenti perché la matrice delle loro cordinate ha caratteristica 3, dato che il minore di ordine 3 determinante della sottomatrice inquadrata è non nullo.

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Tre vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione 3 ne costituiscono una base.

$\boxed{\mathcal{B}}$ Nello spazio in cui è stato fissato un sistema di coord. cart. ort. monometriche destr. $Oxyz$, definito dalla base o.n. $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, sono dati i tre punti $A(1,1,1)$ $B(6,0,1)$ $P(7,0,3)$ e i vettori $\vec{v} = (A-P)$ $\vec{w} = (B-P)$



$\boxed{3}$ 1. Calcolare l'angolo tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (o almeno il suo coseno).

Si ha: $(A-P) = (-6,1,-2)$ $(B-P) = (-1,0,-2)$. *Quindi*
$|\,(A-P)\,| = \sqrt{6^2+1^2+2^2} = \sqrt{41}$ $\quad |\,(B-P)\,| = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}$
$(A-P)\cdot(B-P) = (-6)(-1) + 1\cdot 0 + (-2)(-2) = 10$
Pertanto $\cos(\theta) = \dfrac{10}{\sqrt{41}\,\sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{205}} \simeq 0.7.$ *Quindi* $\theta \simeq 0.8($ *radianti*$)$ *o* $\theta = 45^0.7$

$\boxed{4}$ 2. Determinare un vettore $\vec{u} \in L\{\vec{v}, \vec{w}\}$ di modulo 1 ortogonale a $\vec{\imath}$

I vettori di $L\{\vec{v}, \vec{w}\}$ *sono* $a(-6,1,-2) + b(-1,0,-2) = (-6a-b\,,\ a\,,\ -2a-2b)$
Imponiamo l'ortogonalità con $\vec{\imath} = (1,0,0)$ $\quad (-6a-b\,,\ a\,,\ -2a-2b)\cdot(1,0,0) = 0 \qquad -6a-b = 0$
Per esempio la scelta $a = 1$; $b = -6$ *fornisce il vettore* $(0,1,10)$.
Affinché abbia modulo 1 *basta normalizzarlo, quindi come* $\vec{u}$ *possiamo prendere il vettore*

$$\vec{u} = \frac{(0,1,10)}{\sqrt{101}}$$

$\boxed{2}$ 3. Scrivere equazioni parametriche per la retta r passante per P e parallela alla retta $\overline{AB}$.

Si ha $(B-A) = (5,-1,0)$, *quindi la retta cercata è*

$$\begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = 0 - \ t \\ z = 3 \end{cases}$$

$\boxed{6}$ *4. Determinare sulla retta r i punti C (ce ne sono due) tali che il triangolo ABC sia rettangolo in C.*

I punti della retta r *sono* $C(7+5t\,,\ -t\,,\ 3)$. *Affinché l'angolo* $\widehat{ACB}$ *sia retto occorre che i vettori* $C-A$ *e* $C-B$ *siano ortogonali:*
$(C-A) = (6+5t\,,\ -t-1\,,\ 2)$ $\qquad (C-B) = (1+5t\,,\ -t\,,\ 2)$. $\qquad$ *Quindi:*
$(C-A)\cdot(C-B) = (6+5t\,,\ -t-1\,,\ 2)\cdot(1+5t\,,\ -t\,,\ 2) = (6+5t)(1+5t) + (-t-1)(-t) + 2\cdot 2$
Sviluppando i conti: $26t^2 + 36t + 10 = 0$ $\qquad 13t^2 + 18t + 5 = 0$
L'equazione di secondo grado ha le due soluzioni $t_1 = -1$ $\quad t_2 = -5/13$ *che forniscono i due punti cercati:*

$$C_1 = (2,1,3) \qquad C_2 = \left(\frac{66}{13}, \frac{5}{13}, 3\right)$$

$\boxed{3}$ *5. Dire perché i quattro punti A, B, P, O non giacciono su nessun piano.*

I quattro punti sono complanari purché i tre vettori $(A-O), (B-O), (P-O)$ *siano linearmente dipendenti.*
Si ha $(A-O) = (1,1,1)$ $\quad (B-O) = (6,0,1)$ $\quad (P-O) = (7,0,3)$.
La matrice delle coordinate dei tre vettori ha determinante $-11 \neq 0$, *quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e i quattro punti non sono complanari.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$