COGNOME ____________________ NOME ____________________

C'erano 4 compiti diversi, ma di identica difficoltà; questa è la soluzione di una delle 4 versioni.

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 21 dicembre 2005

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente ogni risposta. I numeretti sono i punteggi dei singole domande

$\boxed{\mathcal{A}}$ Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ 1. Dire se i vettori $(0, 1, 1, 0), (1, -1, -1, 0)$ sono autovettori e perché.

$\boxed{4}$ 2. Determinare tutti gli autovalori di A e dire perché A è diagonalizzabile.

$\boxed{5}$ 3. Determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $P^{-1}AP = D$.

$\boxed{2}$ 4. Diagonalizzare anche A^{-1}, cioè determinare una matrice diagonale D_1 e una matrice invertibile P_1 tali che $P_1^{-1}A^{-1}P_1 = D_1$ (usare l'eguaglianza $P^{-1}AP = D$ senza calcolare esplicitamente A^{-1}).

---

1. $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Quindi $f(0, 1, 1, 0) = (3, 0, 0, 0)$ *non è multiplo di* $(0, 1, 1, 0)$ *e* $(0, 1, 1, 0)$ *non è autovettore.*
   Invece $f(1, -1, -1, 0) = -(1, -1, -1, 0)$, *quindi* $(1, -1, -1, 0)$ *è autovettore con autovalore* -1.

2. *La matrice è triangolare inferiore a blocchi, quindi:*

   $$\det \begin{pmatrix} 2-x & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 1 & -3 & \boxed{3-x} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \boxed{5-x} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-x & 3 \\ 1 & -x \end{pmatrix} \cdot (3-x)(5-x) = (x^2-2x-3)(3-x)(5-x)$$

   Il polinomio $x^2 - 2x - 3$ *ha le radici* -1 *e* 3. *Le radici del polinomio caratteristico sono quindi*
   $\lambda_1 = 5$ *con molteplicità* 1 $\quad \lambda_2 = -1$ *con molteplicità* 1 $\quad \lambda_3 = 3$ *con molteplicità* 2

   Sono quattro radici reali, quindi la prima condizione del criterio di diagonalizzabilità è verificata.
   La seconda condizione è verificata dai due autovalori λ_1, λ_2 *che hanno molteplicità* 1. *Vediamo quindi* λ_3:

   $$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   La matrice ha caratteristica 2, *in quanto eliminando le prime due righe proporzionali alla terza, si ottiene una matrice ridotta con due pivot, quindi* $\dim(V_3) = 4 - 2 = 2$ *e la seconda condizione è verificata anche dall'autovalore* λ_3

   Quindi A *è diagonalizzabile.*

3. *Occorre una base di autovettori.*

   $\boxed{\lambda_1 = 5}$ $\dim(V_5) = 1$ *ed è chiaro che* $f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 5)$, *quindi* $V_5 = L\{(0, 0, 0, 1)\}$.

   $\boxed{\lambda_1 = -1}$ $\dim(V_{-1}) = 1$ *e dal punto* 1. *conosciamo già l'autovettore* $(1, -1, -1, 0)$ *relativo a* λ_1, *quindi* $V_{-1} = L\{(1, -1, -1, 0)\}$.

   $\boxed{\lambda_1 = 3}$ $\dim(V_3) = 2$ *e dal punto* 2. *si hanno immediatamente le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice* $A - 3I$ *che sono* $(3z - 6t, z - 2t, z, t)$. *I vettori di* V_3 *sono pertanto:*

   $(3z - 6t, z - 2t, z, t) = z(3, 1, 1, 0) + t(-6, -2, 0, 1)$, *quindi* $(3, 1, 1, 0)$, $(-6, -2, 0, 1)$ *generano* V_3 *e sono linearmente indipendenti, perché* <u>*due*</u> *e non proporzionali, quindi formano base per* V_3. *Di conseguenza* $V_3 = L\{(3, 1, 1, 0), (-6, -2, 0, 1)\}$

   Questi dati bastano a scrivere P *e* D: $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. *Dato che* $P^{-1}AP = D$, *allora invertendo tutto,* $(P^{-1}AP)^{-1} = D^{-1}$.

   Quindi $P^{-1}A^{-1}P = D^{-1}$.
   Questa è la diagonalizzazione di A^{-1}.
   Quindi P_1 *è la stessa* P *di* A, *mentre la matrice* D_1 *è* D^{-1}

   $$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathcal{B}}$ Nello spazio in cui è stato fissato un sistema di coord. cart. ortogonali monometriche destr. $Oxyz$, sono dati il punto $P(3,0,3)$ e la rette r e s.

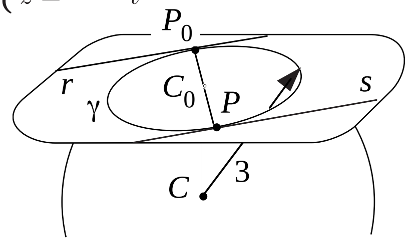
$$r \begin{cases} x = 1 + 3\,t \\ y = 1 - 4\,t \\ z = \quad\quad t \end{cases} \qquad s \begin{cases} x - 3z + 6 = 0 \\ y + 4z - 12 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{3}$ 1. Verificare che r e s sono parallele e che P è un punto di s.

$\boxed{4}$ 2. Determinare la proiezione P_0 di P su r.

$\boxed{8}$ 3. Scrivere la circonferenza γ passante per P e P_0 e tangente a r e a s.
(se ne chiede una rappresentazione cartesiana)

$\boxed{4}$ 4. Determinare il centro C di una sfera di raggio 3 contenente γ.
(suggerimento: la distanza tra C e C_0 è...)



---

1. *Si vede subito che* $\vec{v}_r = (3,-4,1)$. *Per determinare* $\vec{v}_s$, *possiamo per esempio calcolare il prodotto vettoriale dei vettori normali dei due piani che contengono* s*:* $(1,0,-3) \wedge (0,1,4) = (3,-4,1)$. *Qundi* $\vec{v}_r = \vec{v}_s$ *e sono parallele. Inoltre sostituendo* P *nei due piani si hanno due eguaglianze* $-6 = 6 = 0\,;\ 4 \cdot 3 - 12 = 0$, *pertanto* P *sta su* s.

2. *Consideriamo il piano passante per* P *e ortogonale a* r *che è* $3(x-3) - 4(y-0) + 1(z-3) = 0$ *o* $3x - 4y + z - 12 = 0$. *Intersechiamo il piano con* r*:*

   $3(1+3t) - 4(1-4t) + t - 12 = 0 \quad 26t - 13 = 0 \quad t = 1/2$ *Per* $t = 1/2$ *in* r *otteniamo* $P_0 = \left(\frac{5}{2}\,,\,-1\,,\,\frac{1}{2}\right)$.

3. *Il centro* C_0 *della circonferenza è il punto medio tra* P *e* P_0 *cioè*

   $$C_0 = \left(\frac{3+5/2}{2}\,,\,\frac{0-1}{2}\,,\,\frac{3+1/2}{2}\right) = \left(\frac{11}{4}\,,\,-\frac{1}{2}\,,\,\frac{7}{4}\right)$$

   Il raggio della circonferenza è la metà della distanza tra P *e* P_0

   $$r^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 + (0+1)^2 + \left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{25}{4} = \frac{15}{2}$$

   Il piano della circonferenza è il piano contenente le due rette parallele.

   Il suo vettore normale è per esempio $\vec{v}_r \wedge \vec{(P - P_0)} = (3,-4,1) \wedge \left(\frac{1}{2}\,,\,1\,,\,\frac{5}{2}\right) = (-11,-7,5)$

   Il piano è pertanto $-11(x-3) - 7(y-0) + 5(z-3) = 0 \qquad 11x + 7y - 5z - 18 = 0$

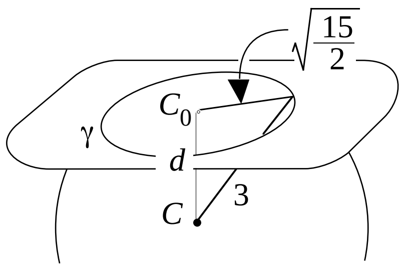
   Questi dati bastano a scrivere una rappresentazione cartesiana di γ*:*

   $$\begin{cases} \left(x - \frac{11}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{15}{2} \\ 11x + 7y - 5z - 18 = 0 \end{cases}$$

4. *Le sfere contenenti* γ *hanno centro sull'asse di* γ *che è la retta*

   $$\begin{cases} x = 11/4 + 11\,t \\ y = -1/2 + 7\,t \\ z = \quad 7/4 - 5t \end{cases}$$

   Il centro cercato sarà un punto del tipo $C = (11/4 + 11\,t\,,\ -1/2 + 7\,t\,,\ 7/4 - 5t)$

   La distanza d *del centro cercato da* C_0 *dovrà soddisfare la relazione*

   $$d^2 + \frac{15}{2} = 9 \qquad \textit{e si ha:}$$

   $$d^2 = \mid (C - C_0) \mid = \left(\frac{11}{4} + 11t - \frac{11}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + 7t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{4} - 5t - \frac{7}{4}\right)^2 = 121t^2 + 49t^2 + 25t^2$$

   da cui

   $195t^2 + 15/2 = 9 \qquad t^2 = \frac{3}{390}$. *Per esempio* $C = \left(\frac{11}{4} + 11\sqrt{\frac{3}{390}}\,,\,-\frac{1}{2} + 7\sqrt{\frac{3}{390}}\,,\,\frac{7}{4} - 5\sqrt{\frac{3}{390}}\right)$