COGNOME ______________________________ NOME ______________________________

C'erano 4 compiti diversi, ma di identica difficoltà; questa è la soluzione di una delle 4 versioni.

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 9 ottobre 2006

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente ogni risposta. I numeri inquadrati sono i punteggi dei singoli domande

$\boxed{14}$ $\boxed{\mathcal{A}}$ È dato il sistema lineare in 4 incognite x, y, z, t dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$. Dire **per ogni** $k \in \mathbb{R}$ se il sistema ha soluzioni e quante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & k+5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k+3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scriviamo la matrice completa del sistema e iniziamo l'algoritmo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & -1 & k+3 \\ 0 & 0 & 6 & k+5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & -1 & k+3 \\ 0 & 0 & 6 & k+5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & k+5 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & -1 & k+3 \end{array}\right)$$

L'ultimo scambio allo scopo di avere un pivot non dipendente da k

$$R_4 \to R_4+(k-1)R_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & k+5 & 0 \\ 0 & 0 & k & -1 & k+3 \end{array}\right) R_4 \to R_4-\frac{k}{6}R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & k+5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-k^2-5k-6}{6} & k+3 \end{array}\right)$$

La matrice ha i primi 3 pivot indipendenti da k.
Il quarto possibile pivot dipende da k. Dato che si annulla per $k = -2$ e per $k = -3$, allora, se $k \neq -2, -3$, la matrice è ridotta e ha 4 pivot tutti nella matrice dei coefficienti, per cui il sistema ha 1 soluzione.

Esaminiamo ora i due casi particolari, per vedere se la matrice ottenuta è ridotta e stabilire se il sistema ha soluzioni.

$\boxed{k = -2}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se $k = -2$ la matrice è ridotta con quattro pivot, ma uno è nella colonna dei termini noti, pertanto il sistema non ha soluzioni.

$\boxed{k = -3}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se $k = -3$ la matrice è ridotta con tre pivot, non nella colonna dei termini noti, pertanto il sistema ha ∞^1 soluzioni.

In conclusione:

Se $k \neq -2$ e $k \neq -3$, il sistema ha 1 soluzione.
Se $k = -2$ il sistema non ha soluzioni.
Se $k = -3$ il sistema ha ∞^1 soluzioni.

$\boxed{7}\boxed{\mathcal{B}}$ In $M_{55}(\mathbb{R})$ è data la matrice A dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione matriciale $A + X = AX$ ha sicuramente un'unica soluzione $X \in M_{55}(\mathbb{R})$ e fornire un'espressione di X in funzione di A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & k & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2k & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Scriviamo: $A + X = AX$*, da cui* $A + X - X = AX - X$*:*

$$A = AX - IX \qquad A = (A - I)X \qquad (A - I)X = A$$

Se la matrice $A - I$ *è invertibile, allora possiamo scrivere*
$(A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1}(A) \qquad X = (A - I)^{-1}A$

Si tratta quindi di stabilire se $A - I$ *è invertibile:*

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2k-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Se la diagonale è non nulla, la matrice è invertibile, in caso contrario, riducendo sicuramente si trovano meno di 5 pivot, per cui non lo è. In conclusione:

Se $k \neq 1$ *e* $k \neq -1/2$ *il problema ha una soluzione e* $X = (A - I)^{-1}A$
Se $k = 1$ *o* $k = -1/2$ *il problema non è detto abbia una soluzione.*

$\boxed{9}\boxed{\mathcal{C}}$ È dato il sistema lineare in 3 incognite x , y , z dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$. **Per ogni** $k \in \mathbb{R}$ **:**

1. Dire se il sistema è ridotto.
2. Dire se il sistema ha soluzioni e quante.
3. Nei casi $k = 2$ e $k = 3$ scrivere tutte le soluzioni (se ce ne sono)

$$\begin{pmatrix} k-2 & 1 & 2 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

La matrice completa è $\left(\begin{array}{ccc|c} k-2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & k & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$

È chiaro che se $k \neq 0$ *e* $k \neq 2$ *il sistema è ridotto e ha tre pivot, quindi una soluzione.*

$\boxed{k = 0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

Il sistema non è ridotto; occorre eseguire ancora $R_3 \to R_3 - 2R_2$.
L'ultima riga diventa $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$
La matrice è ridotta con tre pivot, ma l'ultimo è nella colonna dei termini noti, pertanto il sistema non ha soluzioni.

$\boxed{k = 2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

Il sistema non è ridotto; occorre eseguire ancora $R_2 \to R_2 - 2R_1$ *e la matrice diventa:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

Eliminando (o meglio portando all'ultimo posto) la seconda riga non significativa la matrice è ridotta con due pivot non nella colonna dei termini noti, pertanto il sistema ha ∞^1 *soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale* x.
Risolviamolo mediante due operazioni dell'algoritmo retrogrado:

$$R_2 \to (1/2)R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) R_1 \to R_1 - 2R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Le soluzioni sono pertanto: $(x, -9, 5)$ *al variare di* $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{k = 3}$ *Come già visto il sistema ha una soluzione. Algoritmo retrogrado:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 \to (1/2)R_3 \\ R_2 \to R_2 - 4R_3 \\ R_1 \to R_1 - 2R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \to (1/3)R_2 \\ R_1 \to R_1 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

L'unica soluzione è $(-3, -6, 5)$.