C'erano 4 compiti diversi, ma di identica difficoltà; questa è la soluzione di una delle 4 versioni.

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 6 novembre 2006

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente ogni risposta. I numeri inquadrati sono i punteggi dei singole domande.
I disegni dovranno essere chiari e non ambigui.

$\boxed{8}$ $\boxed{\mathcal{A}}$ È data l'equazione $z^{12} = i - \sqrt{3} \qquad (z \in \mathbb{C})$
Scrivere in forma esponenziale e disegnare nel piano di Gauss tre soluzioni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ di questa equazione con queste proprietà:
- α tale che $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$ e $\mathrm{Im}\,(\alpha) > 0$
- β tale che $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$ e $\mathrm{Im}\,(\beta) < 0$
- γ tale che $\mathrm{Re}\,(\gamma) < 0$ e $\mathrm{Im}\,(\gamma) < 0$

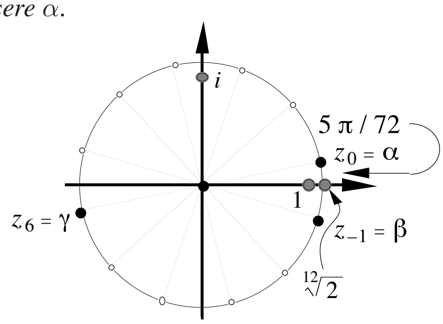
Il numero $i - \sqrt{3}$ *ha modulo* 2 *e argomento* $5\pi/6$, *dato che si ha:* $\cos(\theta) = -\sqrt{3}/2 \qquad \sin(\theta) = 1/2$
Quindi il numero è $2e^{5\pi i/6}$
Le sue radici dodicesime sono notoriamente:

$$z_k = \sqrt[12]{2}\, e^{(5\pi/72 + k\pi/6)i} \qquad k = 0, 1, \ldots, 11$$

La radice z_0 *ottenuta per* $k = 0$ *ha modulo* $\sqrt[12]{2} \simeq 1.09$ *e argomento* $5\pi/72 = 12.5^0$

Questa radice ha parte reale e immaginaria positive e pertanto può essere α.

Possiamo ora disegnare le 12 radici, dato che conosciamo la prima; è chiaro che la numero 6 *e è l'opposta di* z_0 *e quindi può essere scelta come* γ, *mentre quella ottenuta per* $k = -1$ *ha parte reale positiva e parte immaginaria negativa e può essere scelta come* β.



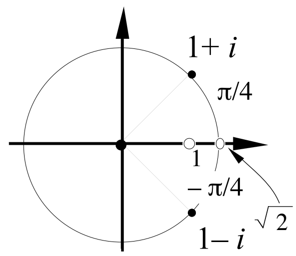
Una possibile scelta è quindi:

$$\alpha = \sqrt[12]{2}\, e^{(5\pi/72)i}$$
$$\beta = \sqrt[12]{2}\, e^{(5\pi/72 - \pi/6)i} = \sqrt[12]{2}\, e^{(-7\pi/72)i}$$
$$\gamma = \sqrt[12]{2}\, e^{(5\pi/72 + 6\pi/6)i} = \sqrt[12]{2}\, e^{(79\pi/72)i}$$

$\boxed{6}$ $\boxed{\mathcal{B}}$ Scrivere in forma esponenziale e algebrica il numero complesso z $\qquad z = \dfrac{(1+i)^{40}}{(1-i)^{39}}$

Si ha $1 + i = \sqrt{2}\, e^{\pi i/4} \qquad 1 - i = \sqrt{2}\, e^{-\pi i/4}$
Scriviamo quindi:

$$z = \frac{(1+i)^{40}}{(1-i)^{39}} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39} \cdot (1+i) = \left(\frac{\sqrt{2}e^{\pi i/4}}{\sqrt{2}e^{-\pi i/4}}\right)^{39} \cdot \sqrt{2}e^{\pi i/4} =$$
$$= \left(e^{\pi i/2}\right)^{39} \sqrt{2}\, e^{\pi i/4}$$



Ma $\dfrac{39\pi}{2} = \dfrac{36\pi}{2} + \dfrac{3\pi}{2}$ *e* $36\pi/2$ *è trigonometricamente equivalente a* 0. *Quindi:*

$z = e^{3\pi i/2}\, \sqrt{2}\, e^{\pi i/4} = \sqrt{2}\, e^{7\pi i/4}$ *e questa è la forma esponenziale.*

$z = \sqrt{2}\,(\cos(7\pi/4) + i \sin(7\pi/4)) = 1 - i$ *e questa è la forma algebrica.*

$\boxed{6}$ $\boxed{\mathcal{C}}$ Scrivere un polinomio di grado non superiore a 6 e a coefficienti <u>reali</u> $P(x)$ che soddisfi le 3 condizioni:
$P(2 + 3i) = 0 \qquad P(3) = 0$ e 3 sia radice di molteplicità $4 \qquad P(0) = 3$

Dovendo avere coefficienti reali, $P(x)$ *dovrà anche avere la radice* $2 - 3i$.
Quindi $P(x)$ *dovrà avere i fattori* $(x - 2 - 3i)$, $(x - 2 + 3i)$, $(x - 3)^4$ *e avendo grado al massimo* 6 *l'ulteriore fattore avrà grado* 0.

$P(x) = a(x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i)(x - 3)^4$

Troviamo a *usando l'ultima condizione:*

$P(0) = 3 = a(-2 - 3i)(-2 + 3i)(-3)^4 = a \cdot 13 \cdot 81$ *da cui* $a \cdot 1053 = 3 \qquad a = 1/351$

$$P(x) = (1/351)(x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i)(x - 3)^4 = (1/351)(x^2 - 4x + 13)(x - 3)^4$$

10 $\mathcal{D}$ È data la matrice $A \in M_{55}(\mathbb{R})$ e sono dati i 5 vettori $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{R}^5$ corrispondenti alle 5 colonne della matrice A, dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 4k-3 & k & k-2 & 2 & k/3 \\ 2k & k-1 & 1 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & k & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-k & 0 \\ 0 & 0 & 2k-3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Individuare la particolare struttura a blocchi di A.
2. Calcolare la caratteristica di A per ogni $k \in \mathbb{R}$.
3. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ dire se i vettori v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 sono linearmente dipendenti o indipendenti.
4. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ dire se i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente dipendenti o indipendenti.
5. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ dire se il vettore v_5 è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3, v_4.

---

1. *La matrice è triangolare superiore a blocchi.*
   Il primo blocco è 2×2, il secondo è 3×3.
   A sua volta il secondo blocco è triangolare inferiore a blocchi, il primo 2×2, il secondo 1×1.

$$\left(\begin{array}{cc||cc|c} 4k-3 & k & k-2 & 2 & k/3 \\ 2k & k-1 & 1 & k-1 & 1 \\ \hline\hline 0 & 0 & k & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-k & 0 \\ \cline{3-5} 0 & 0 & 2k-3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

2. *Calcoliamo* $\det(A)$ *sfruttando la struttura a blocchi:*

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 4k-3 & k \\ 2k & k-1 \end{pmatrix} \cdot \det\left(\begin{array}{cc|c} k & k+1 & 0 \\ 0 & 3-k & 0 \\ \hline 2k-3 & 4 & 2 \end{array}\right) = (2k^2-7k+3) \cdot \det\begin{pmatrix} k & k+1 \\ 0 & 3-k \end{pmatrix} \cdot 2 =$$
$$(2k^2-7k+3) \cdot (3k-k^2) \cdot 2$$

Il polinomio $2k^2 - 7k + 3$ si annulla per $k = 3$ e per $k = 1/2$. Il polinomio $3k - k^2$ si annulla per $k = 0$ e per $k = 3$. Quindi il determinante si annulla per $k = 0$, per $k = 3$ e per $k = 1/2$.
Ne consegue che, se $k \neq 0, 3, 1/2$, la matrice ha caratteristica 5.

Esaminiamo i tre casi particolari:

$\boxed{k=0}$
$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

La matrice ha un minore di ordine 4 non nullo, il determinante della sottomatrice inquadrata. Quindi, se $k = 0$ la matrice ha caratteristica 4.

$\boxed{k=3}$
$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} 9 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Calcoliamo il det della sottomatrice inquadrata con $R_2 \to R_2 - R_1$, $R_4 \to R_4 - R_3$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Quindi, se $k = 3$, la matrice ha un minore di ordine 4 non nullo e ha perciò caratteristica 4.

$\boxed{k=1/2}$
$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} -1 & 1/2 & 3/2 & 2 & 1/6 \\ \hline 1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Il det della sottomatrice inquadrata è evidentemente diverso da 0, quindi, se $k = 1/2$, la matrice ha un minore di ordine 4 non nullo e ha perciò caratteristica 4.

3. *Dal punto 2. si deduce subito che, se $k \neq 0, 3, 1/2$ i cinque vettori sono linearmente indipendenti mentre sono linearmente dipendenti nei tre casi.*

4. *Se $k \neq 0, 3, 1/2$ i quattro vettori sono linearmente indipendenti a maggior ragione.*

   Se $k = 0$ sono linearmente indipendenti perché, come visto, la matrice delle loro coordinate ha un minore di ordine 4 non nullo.

   Se $k = 3$, allora $v_1 = 3v_2$ e sono quindi linearmente dipendenti.

   Se $k = 1/2$, allora $v_1 = -2v_2$ e sono quindi linearmente dipendenti.

5. *Se $k \neq 0, 3, 1/2$ i cinque vettori sono linearmente indipendenti e quindi v_5 non è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3, v_4.*

   Se $k = 0$, allora v_5 è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3, v_4, perché la sua colonna è fuori di un minore di ordine 4 non nullo

   Se $k = 3$, allora v_5 non è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3, v_4, perché nessun minore di ordine 4 non nullo si può estrarre dalle prime quattro colonne, dato che le prime due sono proporzionali.

   Se $k = 1/2$, allora v_5 non è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3, v_4, perché nessun minore di ordine 4 non nullo si può estrarre dalle prime quattro colonne, dato che le prime due sono proporzionali.