COGNOME ______________________ NOME ______________________

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 17 ottobre 2007

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente ogni risposta. I numeri inquadrati sono i punteggi dei singole domande

$\boxed{7}\boxed{\mathcal{A}}$ In $M_{22}(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Scrivere <u>in tutti i modi possibili</u> la matrice nulla 2×2 come combinazione lineare di A_1, A_2, A_3, A_4.

Scriviamo: $a\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2b+c+2d & 2a-4b+3c+d \\ a-b+2c & 2b+c+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *Questo è un sistema lineare omogeneo* 4×4*:* $\begin{cases} 2b+c+2d = 0 \\ 2a-4b+3c+d = 0 \\ a-b+2c = 0 \\ 2b+c+5d = 0 \end{cases}$

Per risolvere il sistema riduciamo la matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Il sistema è ridotto con tre pivot ed è quasi risolto. Le ∞^1 *soluzioni sono* $\Big((-5/2)\,c\,,\ (-1/2)c\,,\ c\,,\ 0\Big)$ *quindi le combinazioni lineari richieste sono:*

$$-\frac{5}{2}c\,A_1 - \frac{1}{2}c\,A_2 + c\,A_3 + 0\,A_4 = 0 \qquad c \in \mathbb{R}$$

$\boxed{7}\boxed{\mathcal{B}}$ *Scrivere tre soluzioni del sistema omogeneo di cui tutte le altre siano combinazione lineare.* $\begin{cases} 2x+4y+3z+10t+2u = 0 \\ 4x+8y+z+4u = 0 \end{cases}$

La matrice del sistema si riduce con una operazione elementare

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 10 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} R_2 \to R_2 - R_1 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -20 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduzione totale: $R_2 \to (-1/5)R_2 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} R_1 \to R_1 - 3R_2 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Le soluzioni sono quindi ∞^3 *dipendenti da* $y\,,\ t\,,\ u$ *e sono:* $(-2y-3t-u\,,\ y\,,\ -4t\,,\ t\,,\ u)$

Si possono scrivere come:

$(-2y-3t-u\,,\ y\,,\ -4t\,,\ t\,,\ u) = y\,(-2,1,0,0,0) + t\,(-3,0,-4,1,0) + u\,(-1,0,0,0,1)$

Quindi tutte le soluzioni sono combinazione lineare di:

$$(-2,1,0,0,0) \qquad (-3,0,-4,1,0) \qquad (-1,0,0,0,1)$$

$\boxed{16}$ $\boxed{\mathcal{C}}$

1. *Sono date le due matrici a elementi reali A e b, con A dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$. Dire* **per ogni** $k \in \mathbb{R}$ *se l'equazione matriciale nell'incognita $\underline{x} \in M_{41}(\mathbb{R})$ ha soluzioni e quante.*
2. *Nei casi $k = 0\,,\,1\,,\,-1$ determinarle tutte (se ce ne sono).*

$$\begin{pmatrix} k & k^2 & -1 & k-1 \\ 0 & k+3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \\ k^2 & k^3 & 1 & k^2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'equazione matriciale è un sistema lineare 4×4. Scriviamo la matrice completa del sistema e iniziamo l'algoritmo di Gauss:
L'operazione $R_4 \to R_4 - k\,R_2$ è sempre lecita (anche per $k = 0$ per cui non è in realtà l'algoritmo di Gauss).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k & k^2 & -1 & k-1 & 1 \\ 0 & k+3 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 & -2 \\ k^2 & k^3 & 1 & k^2 & 1 \end{array}\right) R_4 \to R_4 - kR_2 \left(\begin{array}{cccc|c} k & k^2 & -1 & k-1 & 1 \\ 0 & k+3 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 & -2 \\ 0 & 0 & 1+k & k & -k+1 \end{array}\right) R_3 \leftrightarrow R_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k & k^2 & -1 & k-1 & 1 \\ 0 & k+3 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1+k & k & -k+1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 & -2 \end{array}\right)$$

Il sistema è ora ridotto purché si abbia $k \neq 0, -3, -1$. Se quindi k non è uno di questi tre numeri, il sistema è ridotto con quattro pivot e quattro incognite e l'equazione matriciale ha quindi 1 sola soluzione.

Esaminiamo ora i tre casi particolari per vedere se la matrice ottenuta è ridotta e stabilire se il sistema ha soluzioni.

$\boxed{k = -3}$ *Il sistema non è ridotto e occorre l'algoritmo gaussiano*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 9 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) R_3 \to R_3 + R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 9 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Eliminando l'ultima riga identica alla terza, il sistema è ridotto con tre pivot non tra i termini noti; il problema ha quindi ∞^1 soluzioni.

$\boxed{k = 0}$ *Anche in questo caso il sistema non è ridotto e occorre l'algoritmo gaussiano*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_3 \to R_3 + R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Eliminando l'ultima riga proporzionale alla terza, il sistema è ridotto con tre pivot non tra i termini noti; il problema ha quindi ∞^1 soluzioni.

Possiamo quindi risolverlo: le soluzioni dipendono dall'incognita non pivotale x

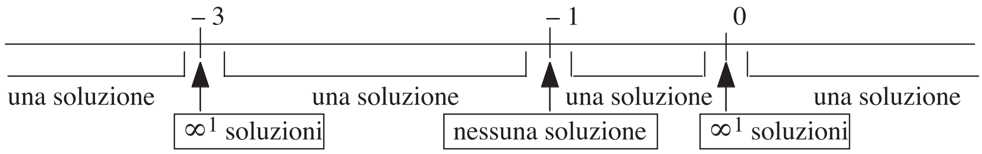
$$\begin{cases} 3y + 2z + t = -6 \\ -z - t = 1 \\ -t = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y + 2z + t = -6 \\ z + t = -1 \\ t = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y + 2z - 2 = -6 \\ z = 1 \\ t = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y = -6 \\ z = 1 \\ t = -2 \end{cases} \qquad \textit{Soluzioni:} \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{k = -1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Il sistema è ridotto e ha quattro pivot, ma l'ultimo è tra i termini noti, quindi non ci sono soluzioni.

In sintesi:



Se $k = 1$, abbiamo visto che il sistema ha 1 soluzione e l'abbiamo già ridotto. Per trovarla occorre l'algoritmo retrogrado di Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_4 \to (1/2)R_4 \\ R_3 \to R_3 - R_4 \\ R_2 \to R_2 - R_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_3 \to (1/2)R_3 \\ R_2 \to R_2 - 2R_3 \\ R_1 \to R_1 + R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Con $R_2 \to (1/4)R_2$ e $R_1 \to R_1 - R_2$ si conclude e si trova la soluzione $\begin{pmatrix} 3 \\ -3/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$