COGNOME ______________________ NOME ______________________

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 12 dicembre 2007

Testo composto di due fogli (quattro pagine). Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente ogni risposta. I numeri inquadrati sono i punteggi dei singole domande.

$\boxed{16}$ $\boxed{\mathcal{A}}$ In $\mathbb{R}^4$ sono dati i seguenti due vettori $v_1 = (1,4,-1,3)$ $v_2 = (1,2,0,1)$ e i seguenti due sottospazi:
$W_1 = L\{(1,1,2,0)\ ,\ (1,0,3,-1)\ ,\ (1,3,0,2)\}$ $W_2 = \{(x,y,z,t) \mid 2x+y-2t=0\}$

Per ognuno dei due sottospazi W_1 e W_2:

$\boxed{2}$ 1. Dire che dimensione ha e perché.
$\boxed{2}$ 2. Dire quale tra i vettori v_1 e v_2 appartiene al sottospazio e quale non appartiene e perché.
$\boxed{2}$ 3. Completare il vettore determinato al punto precedente a base per il sottospazio.
$\boxed{2}$ 4. Dire perché nel sottospazio esiste almeno un vettore v in cui la somma delle coordinate sia 1 edeterminarlo.

---

1. *W_1 è generato da $(1,1,2,0)\ ,\ (1,0,3,-1)\ ,\ (1,3,0,2)$. Vediamo se sono anche linearmente dipendenti: Calcoliamo mediante riduzione la caratteristica della matrice delle coordinate dei tre generatori:*
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Dato che la caratteristica è 2, i vettori sono linearmente dipendenti. Scartiamo per esempio il terzo. I due rimanenti $(1,1,2,0)\ ,\ (1,0,3,-1)$ sono linearmente indipendenti, dato che sono due e non proporzionali, quindi, per il teorema degli scarti, sono generatori e formano base per W_1, che ha quindi dimensione 2.

2. *Vediamo se v_1 è combinazione di lineare di $(1,1,2,0)\ ,\ (1,0,3,-1)$:*
$(1,4,-1,3) = a(1,1,2,0) + b(1,0,3,-1)$. *È un sistema lineare 4×2 la cui matrice riduciamo:*
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Il sistema ha soluzioni, quindi $v_1 \in W_1$. *Eseguiamo conto analogo per v_2:*
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Il sistema non ha soluzioni, quindi $v_2 \notin W_1$.

3. *Per completare v_1 a base di W_1 occorre un vettore di W_1. Per esempio $(1,1,2,0)$.*
I due vettori $(1,4,-1,3),(1,1,2,0)$, dato che sono due e non proporzionali in W_1 che ha dimensione 2, costituiscono base per W_1.

4. *I vettori di W_1 sono $a(1,1,2,0) + b(1,0,3,-1) = (a+b\ ,\ a\ ,\ 2a+3b\ ,\ -b)$. La somma delle coordinate è $a+b+a+2a+3b-b = 4a+3b = 1$. Quindi se $4a+3b=1$ si ha il vettore cercato: Per esempio per $a=1$ e $b=-1$ si ottiene $(0,1,-1,1)$.*

---

1. *W_2 è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo 1×4 con ∞^3 soluzioni: $(-y/2+t\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ t)$ Quindi ha dimensione 3 e una sua base è per esempio quella formata dai tre vettori $(1,0,0,1),(0,0,1,0)$, $(-1/2,1,0,0)$ ottenuti risp. per $\{y=z=0\ ;\ t=1\}$ $\{y=t=0\ ;\ z=1\}$ $\{y=1\ ;\ z=t=0\}$.*

2. *v_1 soddisfa l'equazione che definisce W_2, e v_2 no, Quindi $v_1 \in W_2$ e $v_2 \notin W_2$.*

3. *Per completare v_1 a base di W_1 occorrono due vettori di W_2.*
Per esempio $(1,0,0,1),(0,0,1,0)$. I tre vettori $(1,4,-1,3),(1,0,0,1),(0,0,1,0)$ sono linearmente indipendenti perché la matrice a lato ha caratteristica 3 dato che è non nullo il determinante della sottomatrice 3×3 inquadrata e tre vettori linearmente indipendenti in W_2, che ha dimensione 3, formano una base.
$$\left(\begin{array}{ccc|} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

4. *Il vettore cercato è soluzione del sistema lineare 2×4*
$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x+y-2t=0 \end{cases} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right)$$
Il sistema ha ∞^2 soluzioni. Ponendo $t=0$ e $z=0$ troviamo per esempio $y=2$ e $x=-1$ cioè il vettore $(-1,2,0,0)$ che soddisfa la richiesta. Anche il vettore $(0,0,1,0) \in W_2$ soddisfa la richiesta.

COGNOME ________________________________ NOME ________________________________

$\boxed{16}$ $\boxed{\mathcal{B}}$ Nello spazio nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche destrorse $Oxyz$, sono dati i tre punti $A(2,0,2)$, $B(1,2,0)$, $P(3,0,0)$ e il triangolo $\mathcal{T} : ABP$.

$\boxed{5}$ 1. Calcolare la misura dell'altezza del triangolo $\mathcal{T}$ relativa al lato $\overline{AB}$ (ovvero la distanza di$P$ dalla retta $\overline{AB}$).
$\boxed{4}$ 2. Determinare il piano del triangolo $\mathcal{T}$.
$\boxed{2}$ 3. Dire se l'angolo in P del triangolo $\mathcal{T}$ è acuto o ottuso.
$\boxed{4}$ 4. Determinare il punto Q della retta $\overline{AB}$ tale che il triangolo $\mathcal{U} : QBP$ sia retto in P.
$\boxed{1}$ 5. Dire se il punto Q della retta $\overline{AB}$ è interno o esterno al <u>segmento</u> $\overline{AB}$.

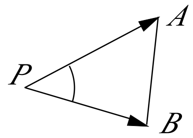
---

1. *Un vettore direzionale per r è $(B-A) = (-1, 2-2)$. La retta $\overline{AB}$ si può scrivere come* $\begin{cases} x = & 2-t \\ y = & 2t \\ z = & 2-2t \end{cases}$

   Il piano passante per P e ortogonale a r è quindi $-(x-3)+2(y-0)-2(z-0) = 0$ o anche $x-2y+2z = 3$.
   Intersechiamolo con r: $(2-t) - 2(2t) + 2(2-2t) = 3$ da cui $t = 1/3$. Per $t = 1/3$ su r si ha il punto $P_0 = (5/3\ ,\ 2/3\ ,\ 4/3)$.
   La distanza di P da r è la distanza tra P e P_0:
   $d = \sqrt{5/3-3)^2 + (2/3-0)^2 + (4/3-0)^2} = \sqrt{16/9 + 4/9 + 16/9} = \sqrt{4} = 2.$

2. *Il vettore normale del piano è ortogonale a $(A-P) = (-1,0,2)$ e a $(B-P) = (-2,2,0)$, quindi si può porre $\vec{n} = (-1,0,2) \wedge (-2,2,0)$:* $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{n} = (-4,-4,-2)$ *o anche* $\vec{n} = (2,2,1)$.
   Il piano è quindi: $2(x-3) + 2y + 1\,z = 0$ *cioè* $2x + 2y + z = 6$.

3. *Occorre verificare il segno del prodotto scalare tra i vettori $(A-P) = (-1,0,2)$ e $(B-P) = (-2,2,0)$. Si ha $(-1,0,2)\cdot(-2,2,0) = 2 > 0$, quindi l'angolo è acuto*



4. *Il punto Q sarà del tipo $(2-t\ ,\ 2t\ ,\ 2-2t)$ e occorrerà che $(Q-P)\cdot(B-P) - 0$, cioè che $(2-t-3\ ,\ 2t\ ,\ 2-2t)\cdot(-2,2,0) = 0$, ovvero $2 + 2t + 4t = 0 \quad t = -1/3$.*
   Quindi $Q = (7/3\ ,\ -2/3\ ,\ 8/3)$.

5. *Dato che, nella parametrizzazione scelta della retta $\overline{AB}$ il punto A si ottiene per $t = 0$ e il punto B per $t = 1$, allora Q, ottenuto per $t = -1/3$, è esterno al segmento $\overline{AB}$.*