COGNOME ______________________________ NOME ______________________________

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 23 ottobre 2008

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente ogni risposta. I numeri inquadrati sono i punteggi dei singole domande

$\boxed{11}$ $\boxed{\mathcal{A}}$

1. Sono date le due matrici a elementi reali A e b, dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$. Dire **per ogni** $k \in \mathbb{R}$ se l'equazione matriciale $A\underline{x} = b$ nell'incognita $\underline{x} \in M_{41}(\mathbb{R})$ ha soluzioni e quante.
2. Nei casi $k = 0\,,\,-1$ determinarle tutte (se ce ne sono).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\,k & -2\,k & 0 \\ 0 & k^2+k & 2 & -2 \\ 2 & k-k^2 & -1 & k^2+2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3\,k \\ k-3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Scriviamo la matrice completa del sistema e iniziamo l'algoritmo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2\,k & -2\,k & 0 & 3\,k \\ 0 & k^2+k & 2 & -2 & k-3 \\ 2 & k-k^2 & -1 & k^2+2 & 3 \end{array}\right) R_3 \to R_3 - R_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2\,k & -2\,k & 0 & 3\,k \\ 0 & k^2+k & 2 & -2 & k-3 \\ 0 & -k-k^2 & 2\,k-1 & k^2+2 & 3-3\,k \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3 + R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2\,k & -2\,k & 0 & 3\,k \\ 0 & k^2+k & 2 & -2 & k-3 \\ 0 & 0 & 2\,k+1 & k^2 & -2\,k \end{array}\right)$$

La matrice è ridotta purché $k^2 + k$ e $2k + 1$ siano non nulli ovvero purché $k \neq 0, -1, -1/2$.
In questi infiniti casi la matrice è ridotta con tre pivot, non nella colonna dei termini noti, pertanto il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Esaminiamo ora i tre casi particolari, per vedere se la matrice ottenuta è ridotta e stabilire se il sistema ha soluzioni.

$\boxed{k=0}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) R_3 \to R_3 - (1/2)R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right)$$

La matrice è ora ridotta con tre pivot non nella colonna dei termini noti, pertanto il sistema ha ∞^1 soluzioni.
Come richiesto determiniamo le soluzioni eseguendo l'algoritmo retrogrado: $R_2 \to R_2 + 2R_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right)$$ *Le soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale y sono quindi* $(0, y, 0, 3/2)$

$\boxed{k=-1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) R_3 \to R_3 + (1/2)R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice è ridotta con due pivot, non nella colonna dei termini noti, pertanto il sistema ha ∞^2 soluzioni.
Come richiesto determiniamo le soluzioni eseguendo l'algoritmo retrogrado:

$R_2 \to (1/2)R_2$ $\qquad$ $R_1 \to R_1 - 2R_2$ $\qquad$ $R_1 \to (1/2)R_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le soluzioni dipendenti dalle incognite non pivotali y e t sono quindi $(y - t + 1/2\,,\ y\,,\ t - 2\,,\ t)$

$\boxed{k=-1/2}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & & & & \\ 0 & -1/4 & 2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & \end{array}\right)$$

Vediamo subito che, senza neanche sostituire $k = -1/2$ in tutta la matrice, che è ridotta con tre pivot, non nella colonna dei termini noti, pertanto il sistema ha ∞^1 soluzioni dipendenti dall'incognita non pivotale z. Non è richiesto di determinarle esplicitamente.

In conclusione:

Il sistema ha sempre soluzioni.

Se $k \neq -1$, il sistema ha ∞^1 soluzioni.
Se $k = -1$ il sistema ha ∞^2 soluzioni.

$\boxed{11}\,\boxed{\mathcal{B}}$ In $M_{35}(\mathbb{R})$ è data la matrice A $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

1. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ dire quante soluzioni ha il sistema omogeneo $A\underline{x} = 0$.
2. Dire per quale $k \in \mathbb{R}$ la quintupla $(-1, 0, 1, 0, 1)$ è soluzione del sistema omogeneo $A\underline{x} = 0$.
3. Per tale k scrivere un numero finito di soluzioni del sistema omogeneo $A\underline{x} = 0$ di cui tutte le altre siano combinazione lineare.
4. Esprimere $(-1, 0, 1, 0, 1)$ come combinazione lineare delle soluzioni determinate al punto precedente.

Eseguiamo l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{matrix} R_2 \to R_2 - (3/2)R_1 \\ R_3 \to R_3 - (3/2)R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & -3/2+k \end{pmatrix} R_3 \to R_3 + R_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2+k \end{pmatrix}$$

Il sistema essendo omogeneo ha sempre soluzioni. È chiaro che se $k \neq 2$ ne ha ∞^2, mentre per $k = -2$ ne ha ∞^3.

Per vedere se $(-1, 0, 1, 0, 1)$ è soluzione sostituiamo nel sistema omogeneo scritto esplicitamente:

$$\begin{cases} 2x + y + z + u = 0 \\ 3x + 2z - t + u = 0 \\ 3x + 3y + z + t + ku = 0 \end{cases} \quad \textit{Otteniamo} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ -2 + k = 0 \end{cases} \quad \textit{Quindi la quintupla è soluzione per } k = 2.$$

Per $k = 2$ eseguiamo l'algoritmo retrogrado sulla matrice ridotta

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4/3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \textit{Le } \infty^3 \textit{ soluzioni sono quindi} \quad \left(\frac{-2z + t - u}{3}, \frac{z - 2t - u}{3}, z, t, u \right)$$

e si possono scrivere come $z\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0, 0\right) + t\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 1, 0\right) + u\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 0, 1\right)$

Queste tre quintuple possono essere le soluzioni richieste.

Scriviamo $(-1, 0, 1, 0, 1) = z\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0, 0\right) + t\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 1, 0\right) + u\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 0, 1\right)$

da cui $\boxed{-1 = -2z/3 + t/3 - u/3 \qquad 0 = z/3 - 2t/3 - u/3 \qquad 1 = z \qquad 0 = t \qquad 1 = u}$

Quindi $\quad (-1, 0, 1, 0, 1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0, 0\right) + 0\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 1, 0\right) + \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 0, 1\right)$

$\boxed{8}\,\boxed{\mathcal{C}}$ Date le matrici $A, B \in M_{44}(\mathbb{R})$ $\qquad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Dire per quali k ha una soluzione determinabile elementarmente l'equazione matriciale $AX + kX = B$ nell'incognita $X \in M_{44}(\mathbb{R})$.
2. Per tali k, scrivere un'espressione per X
3. Per $k = 1$ determinare X esplicitamente.

Si scrive $AX + kIX = B$ da cui $(A + kI)X = B$.

Se $A + kI$ è invertibile allora $(A + kI)^{-1}(A + kI)X = (A + kI)^{-1}B$ da cui $X = (A + kI)^{-1}B$

Vediamo quindi per quali k la matrice __a blocchi__ *$A + kI$ è invertibile.*

$$A + kI = \left(\begin{array}{cc|c|c} -1+k & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1+k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2+k & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right)$$

$\det(A + kI) = \Big((-1 + k)(1 + k) + 1\Big) \cdot (2 + k) \cdot k = k^2 \cdot (2 + k) \cdot k$

Il determinante si annulla per $k = -2$ e per $k = 0$. In conclusione l'equazione ha una soluzione determinabile elementarmente per $k \neq 0$ e $k \neq -2$. In tal caso $X = (A + kI)^{-1}B$

Se $k = 1$, la matrice $A + I = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ *è costituita da 3 blocchi. Per invertirla basta invertire i singoli blocchi:*

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Gli inversi dei due blocchi 1×1 sono banalmente $1/3$ e 1. In conclusione

$$X = (A + kI)^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$