

COGNOME _____ NOME _____ C. _____ Bio. o Tlc.

Esame di Matematica II
16 giugno 2008

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

5 \mathcal{A} Nel piano nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche destrorse Oxy , è data la conica. $-x^2 + 6xy + 7y^2 + 16y = 0$

1. Dimostrare che è un iperbole.
2. Determinarne gli assi.
3. Determinarne gli asintoti.
4. Disegnarla.

4 \mathcal{B} Scrivere il listato di due files MatLab : un file *funzione* e uno di tipo script

• Il file *funzione* ha come variabili di input un numero reale z e un numero intero $n \geq 4$ e come output la matrice b .

Il file deve creare il vettore $1 \times n$ così fatto:

$$v = (z, z + 1, z + 2, \dots, z + n - 1)$$

Poi costruire la matrice $a = 2 \frac{v^T \cdot v}{\|v\|} - I$ (I identica).

La matrice b di output sarà la matrice 4×4 costituita dalle prime 4 righe e colonne di a .

NB: opzionalmente il file controllerebbe se n è effettivamente intero e maggiore di 4.

• Lo script esaminerà la matrice b ottenuta dalla funzione precedente per $n = 5$ e $z \in [0, 5]$ (con passo 0.1), risolverà il sistema lineare $bx = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ e scriverà su schermo la soluzione x solo nel caso in cui $|x| > 2$.

3 \mathcal{C} Completare la matrice a lato in modo che sia una matrice ortogonale di rotazione

$$P = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & . \\ 2/3 & 2/3 & . \\ 1/3 & . & . \end{pmatrix}$$

4 \mathcal{D} Nello spazio, nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche $Oxyz$ sono dati il punto $C(1, 0, 0)$ e la retta r : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$

1. Calcolare la distanza di C da r .
2. Determinare i punti A e B della retta r aventi distanza 2 da C .
3. Determinare una rappresentazione cartesiana per la circonferenza γ di centro C e passante per A e B .

COGNOME _____ NOME _____ C. _____ Bio. o Tlc.

Esame di Matematica II
2 luglio 2008

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

4 \mathcal{A} Nel piano nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche destrorse Oxy , è data la conica. $x^2 + 2y^2 - 3y + 1 = 0$

1. Determinarne gli assi.
2. Disegnarla.

- 4 \mathcal{B} Scrivere il listato di un file **funzione** MatLab che, dato un numero reale x dia come risultato la matrice p calcolata come segue:

Innanzitutto costruisca la matrice m così fatta:

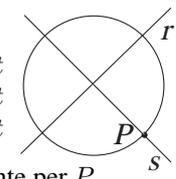
$$\begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 & \cdots & \cdots & x+10 \\ 1 & 0 & & 0 & x & x \\ 0 & 1 & & 0 & x & x \\ \cdots & \cdots & \ddots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & 1 & x & x \\ x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 & \cdots & \cdots & (x+10)^2 \end{pmatrix}$$

Ovvero in m ci sono una sottomatrice identica 9×9 e una sottomatrice fatta di x .

Il risultato sarà la matrice p tale che $p^T \cdot (m^T m) \cdot p$ sia diagonale.

Spiegare perché una tale matrice esiste.

- 3 \mathcal{C} In \mathbb{R}^3 , verificare che $(3, 0, 1)$ e $(1, 1, 1)$ sono autovettori per la matrice A , dire qual è l'autovalore relativo e, senza calcolarlo direttamente, ma usando il teorema spettrale, dedurre un altro autovettore e un altro autovalore. $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

- 5 \mathcal{D} Nello spazio, nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche $Oxyz$ sono dati il punto $P(1, 1, 1)$ e la retta r . $r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$ 
1. Scrivere la retta s passante per P e ortogonale incidente a r .
 2. Determinare una rapp. cartesiana per la circonferenza avente r e s come diametri e passante per P .

COGNOME _____ NOME _____ C. _____ Bio. o Tlc.

Esame di Matematica II
16 luglio 2008

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

- 4 \mathcal{A} Nel piano nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche destrorse Oxy , è data la conica $4x^2 + 12xy + 9y^2 + 12x - 8y = 0$
1. Dimostrare che è una parabola.
 2. Determinarne l'asse.
 3. Disegnarla.

- 4 \mathcal{B} Scrivere il listato di **due** files MatLab : un file *funzione* e uno di tipo script

• Il file *funzione* ha come variabili di input un numero reale x e un numero intero $n \geq 3$ e come output la matrice b .

$$b = \begin{pmatrix} n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & x & \cdots & x & 2 \\ n-2 & x & \cdots & x & 3 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

• Prima di calcolare b il file controlla se effettivamente $n \geq 3$ e se è intero. Se $n < 3$ dà errore e interrompe il calcolo, se n non è intero lo sostituisce con la sua parte intera.

• Lo script esaminerà la matrice b ottenuta dalla funzione precedente per $n = 5$ e $x \in [0, 5]$ (con passo 0.1), ne calcolerà il massimo autovalore λ e lo scriverà su schermo nel caso in cui $10 > |\lambda| > 5$.

- 2 \mathcal{C} Scrivere ognuna delle forme quadratiche in forma matriciale $v^T A v$ e dire qual è carattere di definizione e perché:

$$Q(x, y, z) = 6x^2 + 7z^2$$

$$Q(x, y, z, t) = x^2 + 3xt + 6yz - 3y^2$$

6 \mathcal{D} Nello spazio, nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche $Oxyz$ sono dati il punto $C(0, -1, -1)$ e la retta r .

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

1. Scrivere il piano contenente C e r
2. Calcolare la distanza di C da r e scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza γ di centro C e tangente a r .
3. Determinare il centro di una sfera di raggio $\sqrt{56}$ contenente γ .

COGNOME _____ NOME _____ C. _____ Bio. o Tlc.

Esame di Matematica II
17 settembre 2008

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

4 \mathcal{A} Nel piano nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche destrorse Oxy , è data la conica. $4x^2 + 2xy - 2y^2 - 4x + 2y = k$ dipendente da $k \in \mathbb{R}$

1. Dire per ogni k che conica è.
2. Dire per quale k passa per il punto $(0, 2)$
3. Disegnarla per $k = 0$ e per il k individuato al punto precedente.

4 \mathcal{B} Scrivere il listato di un file **funzione** MatLab che, dato un numero intero positivo n dia come risultato la matrice a calcolata come segue:

Innanzitutto costruisca usando *un solo ciclo* $m = \begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & 1 \\ n & n-1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ **for** la matrice $n \times n$ così fatta:

In secondo luogo costruirà la matrice a blocchi $2n \times 2n$

$$p = \left(\begin{array}{ccc|ccc} n & 0 & \dots & & & \\ 0 & n & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ \hline n & n & \dots & 0 & 0 & \dots \\ n & n & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) + I$$

Il risultato sarà la matrice colonna x soluzione del sistema $px = [1 \ 2 \ 3 \ \dots \ 2n]^T$

3 \mathcal{C} In \mathbb{R}^3 , verificare che $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 2)$ sono autovettori per la matrice A , dire qual'è l'autovalore relativo e, senza calcolarlo direttamente, ma usando il teorema spettrale, dedurne un altro autovettore e un altro autovalore.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

5 \mathcal{D} Nello spazio, nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche $Oxyz$ sono dati il punto $P(0, 3, 1)$ la retta r .

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

1. Scrivere la retta s passante per P e ortogonale incidente a r .
2. Scrivere tutti i piani contenenti r e tra essi individuare quello passante per P .
3. Determinare una rappresentazione cartesiana per la circonferenza di centro P e tangente a r .

COGNOME _____ NOME _____ C. _____ Bio. o Tlc.

Esame di Matematica II
14 gennaio 2009

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

4 \mathcal{A} Nel piano nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche destrorse Oxy , è data la conica $3x^2 + 4xy + 6y^2 + 8x - 4y = 0$

1. Dimostrare che è un'ellisse.
2. Determinarne gli assi e almeno un vertice.
3. Disegnarla.

4 \mathcal{B} Scrivere il listato di due files MatLab : un file *funzione* e uno di tipo script

- Il file funzione avrà come variabili di input un numero reale x e un numero intero $n \geq 3$ e come output la matrice $n \times n$ costruita come segue:

Sia innanzitutto b la matrice $2 \times n$ così fatta:

$$b = \begin{pmatrix} x & x - 0.1 & x - 0.2 & \dots \\ x \cdot e^x & (x - 0.1) \cdot e^{x-0.1} & (x - 0.2) \cdot e^{x-0.2} & \dots \end{pmatrix}$$

La matrice di output sarà $b^T \cdot b + I$

Lo script esaminerà le matrici ottenute per $n = 5$ e $x \in [0, 1]$ (con passo 0.01) per stabilire quale abbia il determinante più piccolo.

2 \mathcal{C} Data la matrice simmetrica A , scrivere esplicitamente la forma quadratica $Q(v) = v^T A v$ e dire che carattere di definizione ha. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6 \mathcal{D} Nello spazio, nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche $Oxyz$ sono dati i tre punti $A = (3, 2, 0)$; $B = (0, 1, 1)$; $C = (1, 0, 1)$.

1. Verificare che il triangolo ABC è rettangolo e specificare quali sono i cateti e quale l'ipotenusa.
2. Determinare il piede dell'altezza condotta all'ipotenusa (proiezione sull'ipotenusa del vertice opposto)
3. Determinare il piano del triangolo.
4. Scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza circoscritta al triangolo rettangolo.

COGNOME _____ NOME _____ C. _____ Bio. o Tlc.

Esame di Matematica II
4 febbraio 2009

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

4 \mathcal{A} Nel piano nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche destrorse Oxy , è data la conica $x^2 - xy - 2y^2 + 9y = 0$

1. Dimostrare che è un'iperbole.
2. Determinarne gli asintoti e almeno un punto.
3. Disegnarla.

4 \mathcal{B} Scrivere il listato di due files MatLab : un file *funzione* e uno di tipo script

- Il file funzione avrà come variabili di input un numero reale x e un numero intero $n \geq 3$ e come output la matrice $4 \times (n + 1)$ costruita come segue:

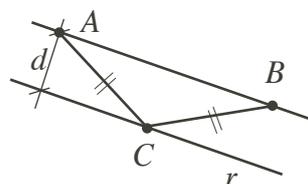
$$\begin{pmatrix} x & x + 1 & x + 2 & \dots & x + n \\ x & x^2 & x^3 & \dots & x^{n+1} \\ n + 1 & n & n - 1 & \dots & 1 \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}$$

- Lo script esaminerà le matrici $A \cdot A^T$, dove A è ottenuta per $n = 5$ e $x \in [0, 1]$ (con passo 0.01) ed elencherà gli x per cui la matrice ha determinante negativo.

2 \mathcal{C} Scrivere in forma matriciale la forma quadratica $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2kyz$ dipendente da $k \in \mathbb{R}$ e dire per ogni $k \in \mathbb{R}$ che carattere di definizione ha (usare criterio di Sylvester).

6 \mathcal{D} Nello spazio, nel quale è stato fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche $Oxyz$ sono dati i due punti $A = (2, 2, 0)$; $B = (0, 1, 1)$ e la retta r .

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$



1. Verificare che la retta AB e la retta r sono parallele.
2. Determinare la distanza d tra le due rette.
3. Determinare il piano contenente le due rette.
4. Determinare il punto C della retta r tale che il triangolo BCA sia isoscele (cioè $\overline{AC} = \overline{BC}$).