ANALISI MATEMATICA e GEOMETRIA

Corsi di Laurea e di Diploma
in Ingegneria Biomedica e delle Telecomunicazioni

Correzione del compito scritto del 12 Gennaio 2000 – Anno Accademico 1999/2000

ANALISI

Esercizio 1. Determinare se esiste la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = 2^{\arcsin(2x)}$ nel punto $(x_0, f(x_0))$, dove $x_0 = \sqrt{2}/4$, ed in tal caso scriverne l'equazione.

Soluzione. La funzione data è definita per $|x| \leq 1/2$, ed è derivabile per $|x| < 1/2$, in quanto composta di funzioni derivabili. In particolare $0 < \frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{2}$ cosicché la retta tangente esiste. La derivata prima di f è data da:

$$f'(x) = (\log 2)2^{\arcsin(2x)} \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

e quindi $f'(x_0) = (\log 2)2^{\frac{\pi}{4}}2^{\frac{3}{2}}$. Dal momento che $f(x_0) = 2^{\frac{\pi}{4}}$, la retta cercata ha equazione

$$y = (\log 2)2^{\frac{\pi+6}{4}}(x - \frac{\sqrt{2}}{4}) + 2^{\frac{\pi}{4}}.$$

Esercizio 2 . Calcolare il polinomio di McLaurin di grado quattro di $f(x) = \log(1 + \sin x) - \frac{11}{12}(\tan x)^4$.

Soluzione. Per comodità poniamo $g(x) = \log(1 + \sin x)$. Risulta allora

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1+\sin x)^{-1}\cos x \\ g''(x) &= -(1+\sin x)^{-1} \\ g'''(x) &= (1+\sin x)^{-2}\cos x \\ g''''(x) &= -2(1+\sin x)^{-3}(\cos x)^2 - \sin x(1+\sin x)^{-2} \end{aligned}$$

Perciò, siccome $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g''(0) = -1$, $g'''(0) = 1$ e $g''''(0) = -2$ il polinomio di McLaurin di grado quattro di g sarà: $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4$. Infine, il polinomio di McLaurin di grado quattro di $(\tan x)^4$ è x^4 e quindi il polinomio cercato è

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - x^4.$$

Esercizio 3. Sia $D = [-2, 0) \cup (0, 2]$ e sia $f : D \to (0, +\infty)$ la funzione $f(x) = x^2 e^{-1/x}$

(a) [2 punti] Calcolare, se esistono, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
(b) [3 punti] Stabilire in quali sottointervalli di D la funzione f risulta crescente.
(c) [3 punti] Determinare, se esistono, massimi e minimi relativi ed assoluti di f su D.

Soluzione. (a) Per quanto riguarda il limite per $x \to 0^-$, posto $y = 1/x$, il limite cercato è uguale al limite $\lim_{y\to-\infty} e^{-y}/y^2$ che si presenta come forma indeterminata del tipo "∞/∞". Applicando due volte il Teorema di l'Hôpital, si vede immediatamente che il limite cercato è $+\infty$, in quanto la derivata seconda del numeratore vale e^{-y} mentre quella del denominatore è 2. Per quanto riguarda invece il limite per $x \to 0^+$, il limite cercato è zero in quanto $x^2 e^{-1/x}$ è il prodotto di due funzioni infinitesime per $x \to 0^+$, cioè x^2 ed $e^{-1/x}$.

(b) La funzione è derivabile in D e la derivata prima è $f'(x) = (1 + 2x)e^{-1/x}$. Essa ha pertanto il segno di $1 + 2x$ ed è quindi positiva per $x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, 2]$ e negativa per $x \in [-2, -\frac{1}{2})$. Perciò f è crescente in $(-\frac{1}{2}, 0)$ ed in $(0, 2]$.

(c) Come stabilito al punto (b), f ha un solo punto critico in $x = -1/2$. Siccome $f''(x) = (2x^{-2} + 2x + 1)x^{-2}e^{-1/x}$, risulta $f''(-\frac{1}{2}) > 0$ ed f ha in $x = -1/2$ un minimo locale che vale $e^2/4$. Per quanto provato al punto (a), f non può avere massimi assoluti in quanto tende a $+\infty$ per $x \to 0^-$. Inoltre, sappiamo che f tende a zero per $x \to 0^+$ ed è positiva su D. Ne segue che f non ha neppure minimo assoluto.