

COGNOME _____ NOME _____

Compito di Geometria - Ingegneria Gestionale - 5 dicembre 2000

Testo composto di un foglio (due pagine). Rispondere alle seguenti domande su questo foglio usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

A Date le condizioni: $\varphi(1, 0) = (5, 2)$; $\varphi(1, -2) = (9, 0)$

punti 2 1. Dire perché esiste un'unica applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ soddisfacente le due condizioni.

Perché $(1, 0)$, $(1, -2)$ costituiscono una base per $\mathbb{R}^2$, dato che sono due vettori non proporzionali.

punti 4 2. Descrivere nel modo migliore $\ker(\varphi)$ e $\text{Im}(\varphi)$

Scriviamo innanzitutto la matrice associata all'applicazione lineare tramite la base canonica:

Abbiamo già $\varphi(1, 0)$. Per calcolare $\varphi(0, 1)$ osserviamo che:

$\varphi(1, 0) - \varphi(1, -2) = \varphi(0, 2) = (5, 2) - (9, 0) = (-4, 2)$, quindi $\varphi(0, 1) = (-2, 1)$.

Da questi dati ricaviamo la matrice che è $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Dato che la matrice ha determinante $9 \neq 0$, allora la matrice ha caratteristica 2, quindi $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 2$ e $\dim(\ker(\varphi)) = 0$, pertanto:

$$\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2 \quad \ker(\varphi) = \{0\}$$

punti 4 3. Dire se φ è semplice e perché.

Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$\det \begin{pmatrix} 5-x & -2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)(5-x) + 4 = x^2 - 6x + 9$$

Quindi c'è un unico autovalore $\lambda = 3$ con molteplicità 2. La matrice $A - 3I$ è $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ e ha caratteristica 1, quindi il sistema omogeneo associato ha ∞^1 soluzioni e pertanto $\dim(V_3) = 1$. Dato che V_3 ha dimensione differente dalla molteplicità di $\lambda = 3$, si deduce che φ non è semplice.

B Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata tramite la base canonica alla matrice a lato.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

punti 2 1. Calcolare $f(2, -1, 2, -1)$.

Basta calcolare $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ Quindi $f(2, -1, 2, -1) = (-6, 2, -6, 2)$.

punti 3 2. Scrivere una base per $\ker(f)$.

Risolvi il sistema omogeneo associato alla matrice. Si può subito eliminare la prima riga proporzionale alla seconda

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} R_2 \rightarrow \frac{1}{3} R_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il sistema è ridotto e ha ∞^1 soluzioni in funzione di t : (t, t, t, t) . Quindi $\ker(\varphi) = L\{(1, 1, 1, 1)\}$ e $(1, 1, 1, 1)$ ne è una base.

punti 5 3. Scrivere una base per $\text{Im}(f)$.

Abbiamo: $\dim(\text{Im}(f)) = 4 - \dim(\ker(f)) = 3$

Quindi una base per $\text{Im}(f)$ sarà formata da tre vettori. Come generatori per $\text{Im}(f)$ possiamo prendere i trasformati dei vettori della base canonica.

Dalla matrice si ha subito che:

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0, 0) &= \underline{(-2, 1, 1, 0)} & f(0, 1, 0, 0) &= \underline{(2, -1, 2, 0)} \\ f(0, 0, 1, 0) &= \underline{(0, 0, -3, 1)} & f(0, 0, 0, 1) &= \underline{(0, 0, 0, -1)} \end{aligned}$$

È necessario scartare uno dei quattro vettori sottolineati in modo che i restanti 3 siano linearmente indipendenti.

Proviamo a scartare il primo. I rimanenti tre sono linearmente indipendenti perché la matrice delle loro coordinate ha un minore di ordine 3 non nullo, il determinante della matrice inquadrata.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi una base per l'immagine è per esempio

$$(2, -1, 2, 0), (0, 0, -3, 1), (0, 0, 0, -1)$$

punti 5 4. Dire perché f è semplice.

Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico:

$$\det \begin{pmatrix} -2-x & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1-x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3-x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-x \end{pmatrix} = (-1-x)(-3-x) \left((-1-x)(-2-x) - 2 \right) =$$

$= (-1-x)(-3-x)(x^2 + 3x)$ In conclusione gli autovalori di f sono:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3 & \text{molteplicità: } 2 & 1 \leq \dim(V_{-3}) \leq 2 & \Rightarrow & \dim(V_{-3}) = 1, 2 \\ \lambda_2 = 0 & \text{molteplicità: } 1 & 1 \leq \dim(V_0) \leq 1 & \Rightarrow & \dim(V_0) = 1 \\ \lambda_3 = -1 & \text{molteplicità: } 1 & 1 \leq \dim(V_{-1}) \leq 1 & \Rightarrow & \dim(V_{-1}) = 1 \end{cases}$$

Per dimostrare che f è semplice occorre solo verificare che $\dim(V_{-3}) = 2$.

Calcoliamo quante soluzioni ha il sistema omogeneo associato alla matrice $A + 3I$:

$$A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ Evidentemente, scartando } R_1 \text{ e } R_2, \text{ la matrice diventa ridotta e il sistema ha } \infty^2 \text{ soluzioni, quindi } \dim(V_{-3}) = 2 \text{ e } f \text{ è semplice.}$$

punti 5 5. Scrivere due matrici 4×4 P e D (P invertibile, D diagonale) tali che $P^{-1}AP = D$.

Occorre una base per ciascuno degli autospazi:

$\lambda_1 = -3$ Dal sistema ridotto ricaviamo subito le soluzioni $(-2y, y, -2t, t)$, quindi una base per V_{-3} è per esempio $(-2, 1, 0, 0), (0, 0, -2, 1)$

$\lambda_2 = 0$ Dato che $V_0 = \ker(f)$, una base per V_0 l'abbiamo già ed è $(1, 1, 1, 1)$.

$\lambda_3 = -1$ Dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato ad $A + I$ e che ha ∞^1 soluzioni:

$$A + I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Dato che evidentemente } t \text{ non è pivotale, si vede subito che le soluzioni sono } (0, 0, 0, t), \text{ per cui una base per } V_{-1} \text{ è } (0, 0, 0, 1).$$

$$\text{Quindi scriviamo subito } P \text{ e } D \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

punti 3 6. Calcolare $f^{2001}(1, 1, 1, 2)$.

Si vede subito che $(1, 1, 1, 2) = (1, 1, 1, 1) + (0, 0, 0, 1)$, con $(1, 1, 1, 1) \in V_0$ $(0, 0, 0, 1) \in V_{-1}$, quindi $f^{2001}(1, 1, 1, 2) = f^{2001}(1, 1, 1, 1) + f^{2001}(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) + (-1)^{2001}(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, -1)$