NUMERI COMPLESSI

F 01. Nel piano di Argand-Gauss disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$.

a. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 2 \text{ e } |z| < 4\}$ b. $\{z \in \mathbb{C} : |z-(1+i)| < 3\}$

c. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z) \text{ e } |z-i| = 2\}$ d. $\{z \in \mathbb{C} : z^3 \in \mathbb{R}\}$

C 02. Altri sottoinsiemi di $\mathbb{C}$ da disegnare nel piano di Argand-Gauss.

a. $\{z \in \mathbb{C} : iz^3 \in \mathbb{R}\}$ b. $\{z \in \mathbb{C} : i + \overline{z} \in \mathbb{R}\}$

c. $\{z \in \mathbb{C} : (1+\overline{z})/|z| = 1\}$ d. $\{z \in \mathbb{C} : |z + 2\overline{z}| < 9\}$

e. $\{z \in \mathbb{C} : |z+2-i| < |z-1+3i|\}$ f. $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ e } \operatorname{Arg}(z^4) = \operatorname{Arg}(-z)\}$

g. $\{z \in \mathbb{C} : z^6 = ib \text{ per un } b \in \mathbb{R},\ b < 0\}$

h. $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 4 \text{ e } \operatorname{Re}(z) \geq 0 \text{ e } \operatorname{Arg}(z^6) = \operatorname{Arg}(iz^2)\}$

F 03. Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e un argomento dei seguenti numeri complessi e disegnarli nel piano di Gauss.

a. $-1+\sqrt{3}i$ b. $\dfrac{1+i}{-3+2i}$ c. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

d. $\dfrac{(1+i)^5}{(1+\sqrt{3}i)^6}$ e. $\dfrac{i}{(1+2i)^2}$ f. $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{40}$

C 04. Altri numeri complessi da disegnare nel piano di Gauss, dopo aver determinato parte reale, parte immaginaria, modulo e un argomento.

a. $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{605}}{2^{600}(1-i)^7 i^{33}}$ b. $(1-\sqrt{3}i)^9 - (1+i)^6$ c. $e^{1726\pi i/3}$

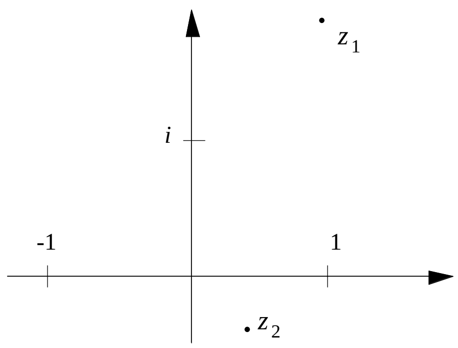
d. e^{1+i} e. $\sin(\pi/5) - i\cos(\pi/5)$

F 05. In $\mathbb{C}$, sono dati graficamente, cioè mediante disegno nel piano di Argand-Gauss, il numero z_1 di modulo 2 e il numero z_2 di modulo $1/2$.

a. Disegnare, mediante operazioni grafiche, i numeri $\overline{z}_1, -z_1, z_1^{-1}$ e le soluzioni dell'equazione $x^6 = z_1$.

b. Disegnare, mediante operazioni grafiche, i numeri $\overline{z}_2, -z_2, z_2^{-1}$ e le soluzioni dell'equazione $x^6 = z_2$.

c. Disegnare infine anche il prodotto $z_1 \cdot z_2$.



T 06. Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

a. Siano z_1 e z_2 le radici quadrate di z. Provare che $z_1 \cdot \overline{z}_2$ è sempre un numero reale.

b. Siano z_3, z_4 le altre due radici cubiche di z^3 (oltre z). Provare che si ha : $z_3 \cdot z_4 = z^2$

A 07. a. Sia $z_0 = (\sqrt{3}+i)/2$. Determinare il minimo $n \in \mathbb{N}$ per cui z_0 sia radice dell'equazione $z^n = 1$.

b. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ l'equazione $z^{10} = a$ ha almeno una soluzione puramente immaginaria.

F 08. Determinare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle seguenti equazioni e disegnarle nel piano di Argand-Gauss.

a. $z^3 = i$ b. $z^3 = -1+i$ c. $z^3 = -1+2i$

d. $(z+i)^3 = i$ e. $z^3 = (1+i)^3$ f. $z^4 = iz^2$

g. $z^5 = z$ h. $z^2 = 8i$ i. $iz^2 + 2z - (2+i) = 0$

j. $e^z = 1$ k. $e^z = -1$

C 09. Determinare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle seguenti equazioni e disegnarle nel piano di Argand-Gauss.

a. $iz^2 - 2z + \sqrt{3} = 0$ b. $iz^3 = \dfrac{(\sqrt{3}+i)^6}{1+i}$ c. $e^z = 0$

d. $e^z = (\sqrt{2}/2)(1+i)$ e. $e^z = 1+i$ f. $e^{z^2} = 1$

g. $e^{z^2+2z+1} = 1$ h. $\sin(z) = 0$ i. $\cos(z) = 2$

POLINOMI

F 11. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado 2 avente 4 e $5/7$ come radici.

F 12. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tale che : $P(1) = P(2) = 0$, $P(0) = 1$ e $\deg(P) = 2$.

T 13. Dimostrare che se P e Q sono due polinomi e $\deg(P) = n$ e $\deg(Q) = m$, allora:
$\deg(P+Q) \leq \max(m,n)$ $\deg(P \cdot Q) = n + m$.

T 14. Sia $z \in \mathbb{C}$ e siano $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ le sue radici n-esime ($n \geq 2$). Provare che:
$z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1} = 0$

F 15. Verificare che 1 è radice di $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ e trovare le altre due radici.

F 16. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado minimo avente come radici $1+i$ e i e tale che $P(1) = 3$.

F 17. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado minimo avente come radici $1+i$ e i e tale che $P(1) = 3$.

C 18. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado 3 avente $1+i$ come radice e scomporlo in fattori di grado minimo a coefficienti reali.

C 19. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado 3 tale che $P(1+i) = 0$, $P(i) = 1$. Perché non ne esiste uno di grado 2 ?

A 20. Scomporre in fattori a coefficienti reali di grado minimo i polinomi seguenti:

a. $P_1(x) = x^4 + 1$ b. $P_2(x) = x^2 + 2x + 4$

c. $P_3(x) = x^5 - 1$ d. $P_4(x) = x^6 - x^2$

A 21. Dire quanti fattori a coefficienti reali ha il polinomio $x^{27} - 3$.

T 22. Sia $P(x) \in \mathbb{C}[x]$. Dimostrare che se tutte le radici di $P(x)$ hanno molteplicità due, allora $P(x)$ è il quadrato di un altro polinomio di $\mathbb{C}[x]$. Dire quale ulteriore ipotesi occorre per provare la stessa cosa in $\mathbb{R}[x]$.

C 23. a. Può un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ a coefficienti non tutti reali avere una radice reale ?

b. Può un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ a coefficienti non tutti reali avere radici tutte reali ?

c. Può un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ avere due radici coniugate con diversa molteplicità ?

d. Può un numero complesso non reale avere una radice n-esima reale ?

F 24. Constatato che 1 è radice di $x^{11} - 5x^{10} + 10x^9 - 10x^8 + 5x^7 - x^6 + x^5 - 4x^4 + +6x^3 - 4x^2 + x$, determinarne la molteplicità.

C 25. Sia $P(x) = x^{31} - 2x^5 + ax + b \in \mathbb{C}[x]$. Determinare $a, b \in \mathbb{C}$ tali che i sia radice di $P(x)$ almeno con molteplicità 2.