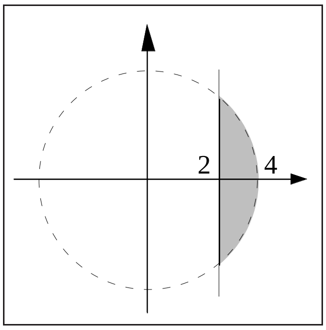
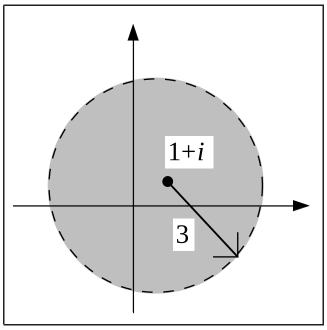
01. a. I numeri complessi z con $\mathrm{Re}\,(z) \geq 2$ sono quelli a destra della retta verticale (retta compresa). Quelli con modulo minore di 4 sono all'interno della circonferenza di centro 0 e raggio 4 (circonferenza esclusa). Quindi l'insieme è quello in grigio, arco (ed estremi dell'arco) escluso, ma segmento (senza estremi) compreso.

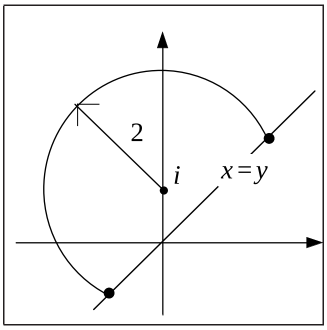
b. I numeri complessi z tali che $\mid z-(1+i) \mid < 3$ sono quelli che nel piano hanno distanza da $1+i$ minore di 3, quindi sono quelli all'interno della circonferenza di centro $1+i$ e raggio 3 (circonferenza esclusa).

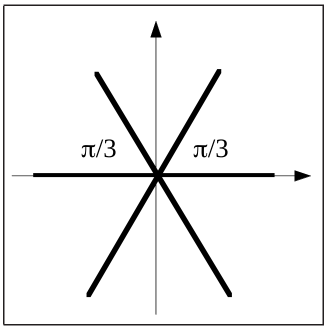
a.


b.


c. I numeri complessi z con $\mathrm{Im}\,(z) \geq \mathrm{Re}\,(z)$ sono quelli al di sopra della bisettrice principale (retta compresa). Quelli tali che $\mid z-i \mid = 2$ sono sulla circonferenza di centro i e raggio 2. Quindi l'insieme è l'arco di circonferenza segnato (estremi compresi).

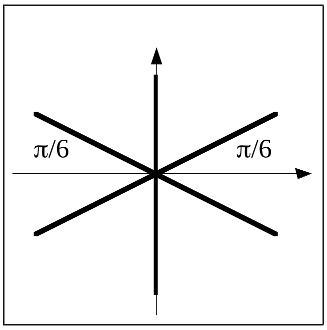
d. Sia θ un argomento di z. Perché z^3 sia reale occorre che $\mathrm{Arg}(z^3) = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Ma $\mathrm{Arg}(z^3) = 3\,\theta$, quindi $\theta = k\pi/3$ con $k \in \mathbb{Z}$. Si hanno perciò i numeri di argomento $0, \pi/3, 2\pi/3, \ldots$, cioè sei semirette. Dato che poi anche 0 appartiene all'insieme, le sei semirette sono in pratica l'unione delle tre rette in grassetto.

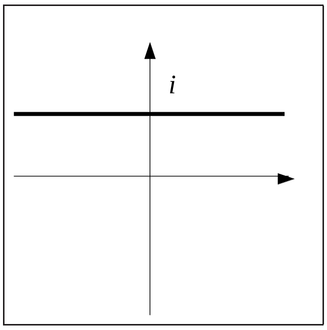
c.


d.


02. a. Sia θ un argomento di z. Perché iz^3 sia reale occorre che $\mathrm{Arg}(iz^3) = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ma $\mathrm{Arg}(iz^3) = \mathrm{Arg}(i) + 3\,\theta = \pi/2 + 3\,\theta$, quindi si deve avere $k\pi = \pi/2 + 3\,\theta$ cioè $\theta = (k\pi - \pi/2)/3$ con $k \in \mathbb{Z}$. Si hanno perciò i numeri di argomento $-\pi/6, \pi/6, \pi/2, \ldots$, cioè sei semirette. Dato che poi anche 0 appartiene all'insieme, le sei semirette sono in pratica l'unione delle tre rette in grassetto.

02. b. Poniamo $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Se $i + \overline{z} \in \mathbb{R}$, allora $i + a - ib \in \mathbb{R}$, cioè $a + (1-b)i \in \mathbb{R}$. Di conseguenza si deve avere $b = 1$. L'insieme è quindi una retta.

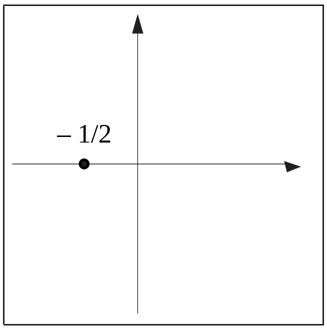
a.


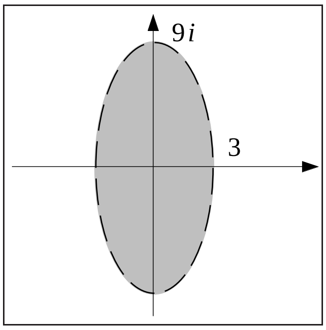
b.


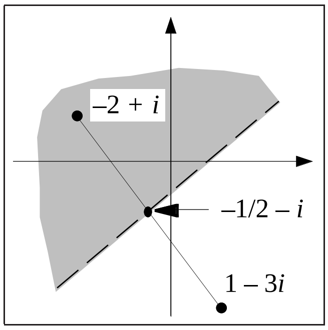
02. c. Poniamo $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ e scriviamo $(1 + \overline{z}) = \mid z \mid$. Si ha: $1 + a - bi = \sqrt{a^2 + b^2}$, cioè $a + 1 + \sqrt{a^2 + b^2} + bi = 0$. Allora $b = 0$ e $a + 1 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$, cioè $a + 1 + \mid a \mid = 0$. Per $a > 0$ si trova $a = -1/2$, per $a < 0$ non si trova niente, quindi l'insieme è costituito dal solo numero $z = -1/2 + 0i = -1/2$

02. d. Poniamo $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. La diseguaglianza $\mid z + 2\overline{z} \mid < 9$ diventa $\mid a + ib + 2a - 2ib \mid < 9$, cioè $\mid 3a - ib \mid < 9$ o anche $\sqrt{9a^2 + b^2} < 9$ e $9a^2 + b^2 < 81$. Si tratta quindi dell'interno dell'ellisse $\dfrac{a^2}{9} + \dfrac{b^2}{81} = 1$ che ha centro in 0 e semiassi di lunghezze rispettivamente 3 e 9. Il bordo è escluso perché la diseguaglianza è stretta.

02. e. Sono i punti che hanno distanza da $-2 + i$ minore di quella da $1 - 3i$, quindi sono situati nel semipiano individuato dalla retta che è l'asse del segmento che ha come estremi i due numeri complessi. Il punto medio del segmento è $\dfrac{(-2 + i) + (1 - 3i)}{2} = -\dfrac{1}{2} - i$.

c.


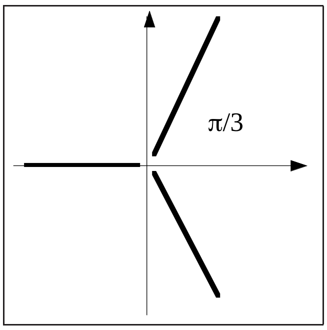
d.


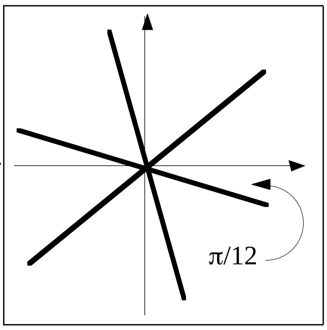
e.


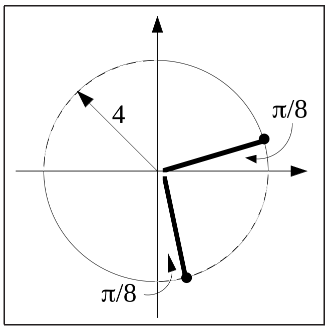
02. f. Sia θ un argomento di z. Allora $\mathrm{Arg}(z^4) = 4\theta$ e $\mathrm{Arg}(-z) = \theta + \pi$, quindi la condizione richiesta è che $4\theta = \theta + \pi + \underline{2k\pi}$ per $k \in \mathbb{Z}$ (l'uguaglianza di argomenti è sempre a meno di multipli di $2k\pi$), da cui $\theta = \dfrac{(2k + 1)\pi}{3}$. Dando a k successivamente i valori $0, 1, 2$, si ottengono $\theta = \pi/3, \pi, 5\pi/3$. Gli altri k forniscono argomenti equivalenti. In definitiva sono le tre semirette dei numeri coi tre argomenti. Lo 0 non appartiene all'insieme.

02. g. Sia θ un argomento di z. Allora $\mathrm{Arg}(z^6) = 6\theta$ e il numero ib con $b < 0$ ha sempre argomento $-\pi/2$, quindi $6\theta = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, da cui $\theta = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{6}$. In definitiva sono sei semirette. Dato che anche 0 fa parte dell'insieme, allora sono tre rette.

02. h. Sia θ un argomento di z. Allora un argomento di z^6 è $6\,\theta$., mentre un argomento di iz^2 è $\mathrm{Arg}(i) + 2\theta = \pi/2 + 2\theta$. Affinché gli argomenti siano gli stessi, essi devono differire di $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, cioè $6\theta = \pi/2 + 2\theta + 2k\pi$, da cui $\theta = \pi/8 + k\pi/2$. Quindi i numeri z cercati hanno come possibili argomenti $\pi/8, 5\pi/8, 9\pi/8, 13\pi/8$ e sono situati su quattro semirette aventi come prmo estremo 0. Dato che però si deve avere $\mathrm{Re}\,(z) > 0$, escludiamo le semirette corrispondenti a $\theta = 5\pi/8, 9\pi/8$. Inoltre, poiché $\mid z \mid \leq 4$, restringiamo le semirette al disco di raggio 4 (bordo compreso). Escludiamo dall'insieme 0 che non ha argomento. In definitiva si hanno due segmenti (un estremo compreso, l'altro no).

f.


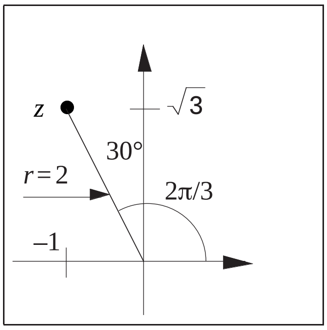
g.


h.


03. a. La parte reale e immaginaria sono -1 e $\sqrt{3}$. Il modulo è $\sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$.
Per quanto riguarda l'argomento θ, si ha $\{\cos(\theta) = -1/2\ ;\ \sin(\theta) = \sqrt{3}/2\}$ da cui $\theta = 2\pi/3$.
Se si vuole calcolare l'argomento mediante l'arcotangente, occorre tenere conto che il numero è nel secondo quadrante e quindi: $\theta = \arctan(\sqrt{3}/(-1))\underline{+\pi} = 2\pi/3$

$\mathrm{Re}\,(z) = -1 \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \sqrt{3}$

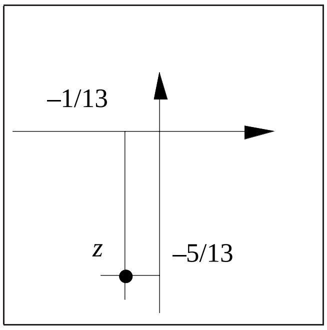
$|\ z\ | = 2 \qquad \theta = 2\pi/3$



03. b. Si ha: $\dfrac{1+i}{-3+2i} = \dfrac{(1+i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)} = \dfrac{-1-5i}{13}$.
Da qui parte reale e parte immaginaria. Dato che il numero è nel terzo quadrante, un'argomento si può calcolare con l'arcotangente, togliendo però π.

$\mathrm{Re}\,(z) = -\dfrac{1}{13} \qquad \mathrm{Im}\,(z) = -\dfrac{5}{13}$

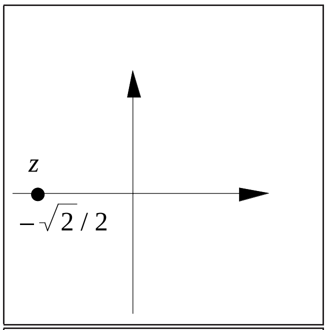
$|\ z\ | = \sqrt{\dfrac{2}{13}} \qquad \theta = \arctan\dfrac{-5}{-1} - \pi \simeq -1.768 \simeq -101^0$



03. c. Il numero è reale negativo, quindi ha argomento π.

$\mathrm{Re}\,(z) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \mathrm{Im}\,(z) = 0$

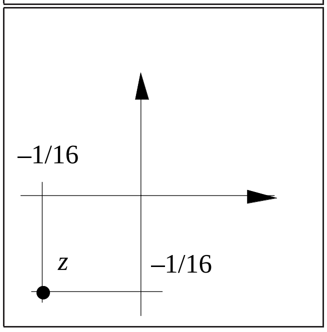
$|\ z\ | = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \theta = \pi$



03. d. $1+i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/4$, mentre $1+\sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento $\pi/3$.
Pertanto il numero in questione ha modulo $(\sqrt{2})^5/2^6$ e argomento $5(\pi/4) - 6(\pi/3) = -3\pi/4$ o anche l' equivalente $5\pi/4$. Quindi:

$\mathrm{Re}\,(z) = -\dfrac{1}{16} \qquad \mathrm{Im}\,(z) = -\dfrac{1}{16}$

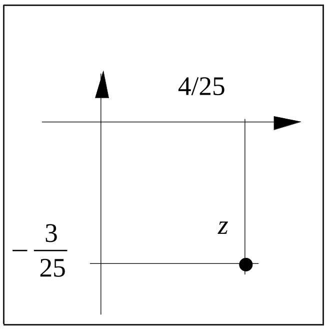
$|\ z\ | = \dfrac{\sqrt{2}}{16} \qquad \theta = -\dfrac{3}{4}\pi$



03. e. Conviene eseguire i calcoli algebricamente:
$\dfrac{i}{(1+2i)^2} = \dfrac{i(1-2i)^2}{(1+2i)^2\,(1-2i)^2} = \dfrac{4-3i}{25}$.
L'argomento può essere calcolato con l'arcotangente perché ci troviamo nel quarto quadrante.

$\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{4}{25} \qquad \mathrm{Im}\,(z) = -\dfrac{3}{25}$

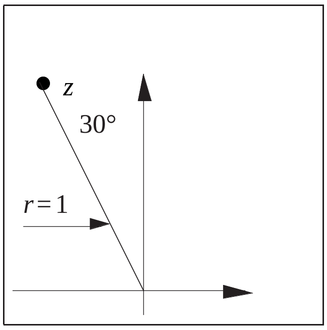
$|\ z\ | = \dfrac{1}{5} \qquad \theta = \arctan(-4/3) \simeq -0.927 \simeq -53^0$



03. f. $1/2 - \sqrt{3}i/2$ ha modulo 1 e argomento $-\pi/3$.
La sua potenza 40-esima ha modulo 1 e argomento $-40\pi/3 = -39\pi/3 - \pi/3 = -13\pi - \pi/3 = -12\pi - 4\pi/3$ che è trigonometricamente equivalente a $-4\pi/3$ (dato che 12π è multiplo intero di 2π) e anche a $2\pi/3$. Perciò:

$\mathrm{Re}\,(z) = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

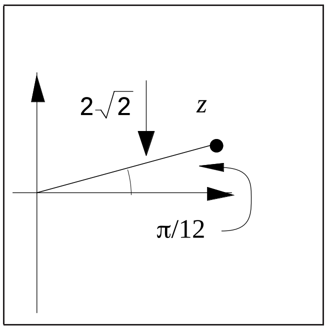
$|\, z \,| = 1$ $\qquad$ $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$



04. a. $\sqrt{3}+i$ ha modulo 2 e argomento $\pi/6$. Quindi $(\sqrt{3}+i)^{605}$ ha argomento $605\pi/6$ che è trigonometricamente equivalente a $5\pi/6$.
$1 - i$ ha argomento $-\pi/4$. L'argomento di $(1 - i)^7$ è quindi $-7\pi/4$.
$i^{33} = i^{32} \cdot i = i$ e ha argomento $\pi/2$.
L'argomento totale è $5\pi/6 + 7\pi/4 - \pi/2 = 25\pi/12$ trigonometricamente equivalente a $\pi/12$.

$\mathrm{Re}\,(z) = 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\,(z) = 2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

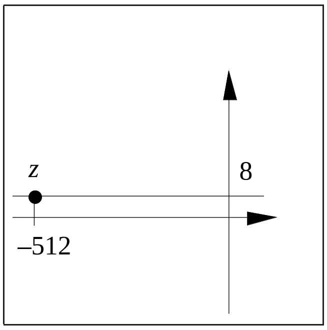
$|\, z \,| = 2\sqrt{2}$ $\qquad$ $\theta = \dfrac{\pi}{12}$



04. b. Si ha:
$(1 - \sqrt{3}i)^9 - (1+i)^6 = \left(2\,e^{-2\pi i/3}\right)^9 - \left(\sqrt{2}\,e^{\pi i/4}\right)^6 =$
$= 2^9\,e^{-3\pi i} - 2^3\,e^{3\pi i/2} = -512 + 8i$

$\mathrm{Re}\,(z) = -512$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\,(z) = 8$

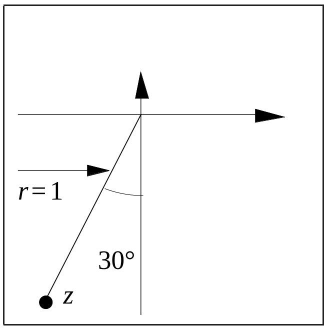
$|\, z \,| = \sqrt{262208}$ $\qquad$ $\theta = \arctan\left(-\dfrac{1}{64}\right) + \pi$



04. c. La divisione di 1726 per 3 ha quoto 575 e resto 1 da cui $1726 = 575 \cdot 3 + 1$ e $1726\,\dfrac{\pi}{3} = 575 \cdot 3\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = 575\pi + \dfrac{\pi}{3}$ che è trigonometricamente equivalente a $-\pi + \pi/3$ cioè a $-2\pi/3$ (o a anche a $\pi + \pi/3 = 4\pi/3$). Quindi:

$\mathrm{Re}\,(z) = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\,(z) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$|\, z \,| = 1$ $\qquad$ $\theta = -\dfrac{2}{3}\,\pi$

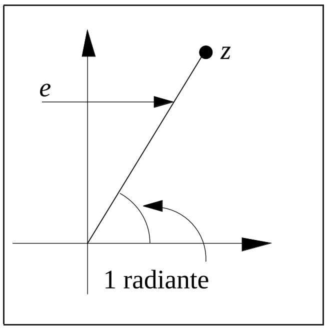


04. d. Si scrive $e^{1\,+\,i} = e^1 \cdot e^i$ e questa è la forma esponenziale di un numero complesso avente come modulo e e come argomento il coefficiente di i nell'esponente di e, cioè 1 (radiante). Quindi:

$\mathrm{Re}\,(z) = e \cdot \cos(1)$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\,(z) = e \cdot \sin(1)$

$|\, z \,| = e$ $\qquad$ $\theta = 1$

(dove per 1 si intende sempre 1 radiante e cioè circa $57°.17'\ldots$)

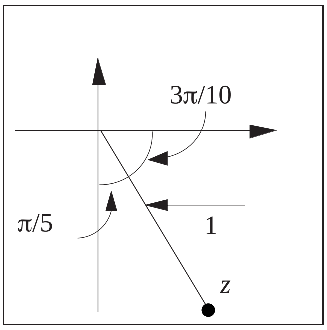


04. e. Parte reale e parte immaginaria sono ovvie e il modulo è 1. Per quanto riguarda l'argomento θ, usando note formule trigonometriche:

$$\begin{array}{l}
\cos(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right) \\
\sin(\theta) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)
\end{array}$$

$\mathrm{Re}\,(z) = \sin(\pi/5)$ $\mathrm{Im}\,(z) = \cos(\pi/5)$

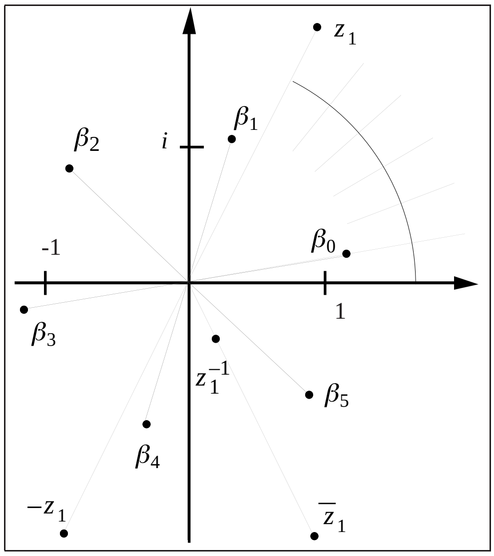
$|\ z\ | = 1$ $\theta = -\frac{3}{10}\pi$



05. Il problema va risolto in maniera grafica. Valgano le seguenti considerazioni:

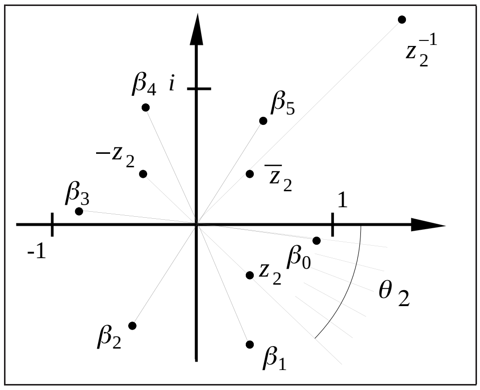
a. Il numero $\overline{z}_1$ ha lo stesso modulo di z_1, ma argomento opposto in segno. Quindi $\overline{z}_1$ è simmetrico di z_1 rispetto all'asse reale.

- Il numero $-z_1$ ha lo stesso modulo di z_1, ma argomento aumentato di π. Quindi $-z_1$ è simmetrico di z_1 rispetto all'origine.
- Se $z_1 = re^{\theta i}$, allora $z_1^{-1} = r^{-1}e^{-\theta i}$, quindi z^{-1} ha lo stesso argomento di $\overline{z}_1$, ma il suo modulo è 1/2.
- Le radici seste di z_1 hanno argomento $\sqrt[6]{2}$ (di poco maggiore di 1). La prima radice β_0 si disegna dividendo per 6 l'argomento di z_1. Le altre cinque si disegnano per simmetria, dato che dividono la circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt[6]{2}$ in 6 parti uguali.

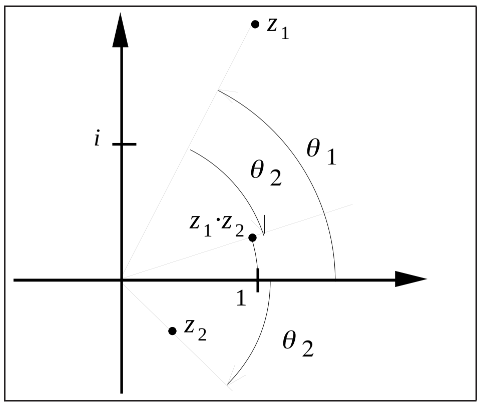


b. Per il numero z_2 valgono le stesse considerazioni fatte per z_1.

- Il numero $\overline{z}_2$ ha lo stesso modulo di z_2, ma argomento opposto in segno. Quindi $\overline{z}_2$ è simmetrico di z_2 rispetto all'asse reale.
- Il numero $-z_2$ ha lo stesso modulo di z_2, ma argomento aumentato di π. Quindi $-z_2$ è simmetrico di z_2 rispetto all'origine.
- Il numero z_2^{-1} ha lo stesso argomento di $\overline{z}_2$, ma il suo modulo è 2.
- Le radici seste di z_2 hanno argomento $\sqrt[6]{1/2}$ che è di poco inferiore di 1. Come argomento di z_2 conviene prendere l'argomento *negativo* θ_2. La prima radice β_0 si può trovare dividendo θ_2 per 6. Le altre cinque si disegnano per simmetria.



c. Per disegnare $z_1 \cdot z_2$ occorre sommare gli argomenti di z_1 e di z_2. Come sopra prendiamo l'argomento *negativo* θ_2 di z_2 che va quindi *sottratto* all'argomento *positivo* θ_1 di z_1. Il modulo è il prodotto dei moduli, cioè 1.



06. a. Le radici quadrate di un numero complesso sono una opposta dell'altra e pertanto: $\mathrm{Arg}(z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \pi$. Inoltre $\mathrm{Arg}(\overline{z}_2) = -\mathrm{Arg}(z_2)$. Pertanto: $\mathrm{Arg}(z_1 \cdot \overline{z}_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(\overline{z}_2) = -\pi$. Avendo argomento $-\pi$, allora $z_1 \cdot \overline{z}_2$ è un numero reale negativo.

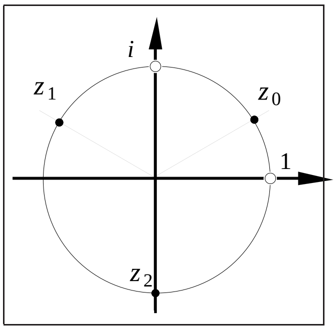
b. Sia θ un argomento di z. Allora z_1 e z_2 hanno lo stesso modulo r di z e argomenti che differiscono da quello di z per $2\pi/3$ e $-2\pi/3$, cioè $\theta + 2\pi/3$ e $\theta - 2\pi/3$. Quindi $z_1 \cdot z_2$ ha modulo r^2 e argomento $\theta + 2\pi/3 + \theta - 2\pi/3 = 2\theta$. Anche z^2 ha modulo r^2 e argomento 2θ, quindi coincidono.

07. a. Affinché $z_0 = (\sqrt{3} + i)/2$ sia radice di $z^n = 1$, occorre che $z_0^n = 1$. Ma $z_0 = e^{\pi i/6}$, quindi $z_0^n = e^{n\pi i/6}$. Perché sia 1 occorre che $n\pi i/6 = 2k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$. Come si vede subito, ciò accade per la prima volta per $n = 12$.

b. Se θ è un argomento di a. Le radici decime di a hanno parte reale $\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{10}$, quindi occorre che per almeno un k si abbia $\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{10} = 0$, cioè $\dfrac{\theta + 2k\pi}{10} = \pm\dfrac{\pi}{2}$ da cui $\theta = \pm 5\pi - 2k\pi$. Gli unici a con questi argomenti sono quelli reali negativi.

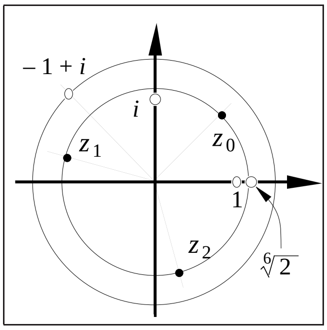
08. a. Scriviamo i in forma esponenziale: $i = 1 \cdot e^{(\pi/2)i}$. Le sue radici terze hanno modulo 1 e argomenti $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$ con $k = 0, 1, 2$ e sono quindi:

$$z_0 = e^{\pi i/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$
$$z_1 = e^{5\pi i/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$
$$z_2 = e^{3\pi i/2} = -i$$



08. b. Il numero $-1+i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $3\pi/4$, quindi le soluzioni sono $z_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot e^{3\pi/12 + 2k\pi/3)i}$. Ponendo $k = 0, 1, 2$ si ottiene:

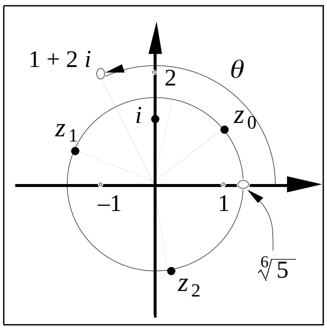
$$z_0 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{\pi i/4}$$
$$z_1 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{11\pi i/12}$$
$$z_2 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{19\pi i/12}$$



08. c. Il numero $-1 + 2i$ ha modulo $\sqrt{5}$. L'argomento è un angolo non notevole che si può calcolare come $\theta = \arctan(-2) + \pi$, quindi le soluzioni sono

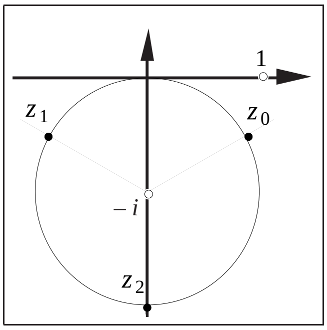
$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{5}} \cdot e^{(\theta/3 + 2k\pi/3)i} \quad \text{per } k = 0, 1, 2$$

Il disegno si può ottenere dividendo "in qualche modo" per 3 l'angolo θ e quindi ottenendo z_0. Le altre due si ottengono per simmetria dato che dividono la circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt[6]{5} \simeq 1.3$ in 3 parti uguali.



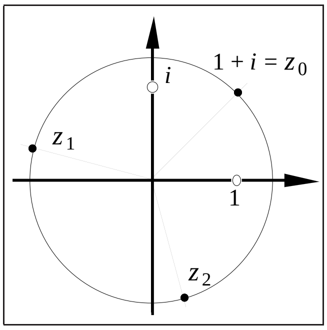
08. d. Si pone $u = z + i$ e si ottiene l'equazione $u^3 = i$, già risolta all'esercizio 08.a. Dato che $z = u - i$, le soluzioni sono quelle dell'equazione suddetta a cui è stato però sottratto i.

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \quad , \quad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \quad , \quad z_2 = -2i$$



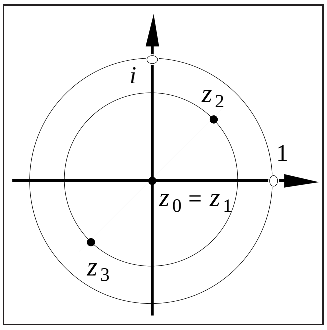
08. e. Il numero $1+i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/4$, il numero $(1+i)^3$ ha quindi modulo $\left(\sqrt{2}\right)^3$ e argomento $3\pi/4$. Le soluzioni dell'equazione hanno pertanto modulo $\sqrt{2}$ e argomento $3\pi/12 + 2k\pi/3$ per $k = 0, 1, 2$. Per $k = 0$ si ottiene ovviamente $1 + i$. Le soluzioni sono:

$$z_0 = 1{+}i \quad , \quad z_1 = \sqrt{2}{\cdot}e^{11\pi i/12} \quad , \quad z_2 = \sqrt{2}{\cdot}e^{19\pi i/12}$$



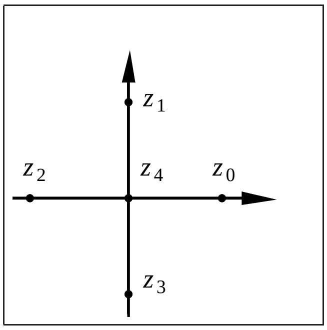
08. f. Si scrive $z^2(z^2 - i) = 0$. Quindi due radici del polinomio $z^4 - iz^2$ sono 0 le altre sono le radici quadrate di i che ha modulo 1 e argomento $\pi/2$ e sono quindi $\pm e^{\pi/4}$. In conclusione si ha:

$$z_0 = z_1 = 0 \quad , \quad z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad , \quad z_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$



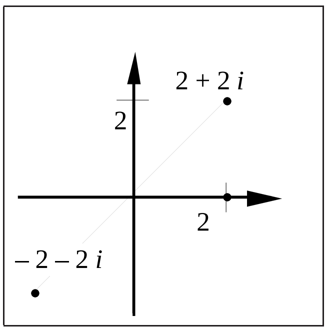
08. g. Si scrive $z(z^4 - 1) = 0$, quindi quattro delle soluzioni sono le radici quarte dell'unità che sono ± 1 e $\pm i$, la quinta soluzione è 0.

$$z_0 = 1 \ , \ z_1 = i \ , \ z_2 = -1 \ , \ z_3 = -i \ , \ z_4 = 0$$



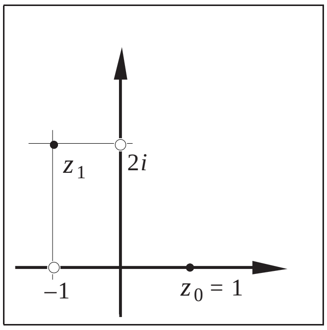
08. h. Dato che il numero $8i$ ha modulo 8 e argomento $\pi/2$, le sue radici quadrate hanno modulo $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e argomenti $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{2}$ per $k = 0, 1$, cioè $\pi/4$ e $5\pi/4$ e sono quindi:

$2\sqrt{2}e^{\pi i/4} = 2 + 2i \qquad 2\sqrt{2}e^{5\pi i/4} = -(2 + 2i)$

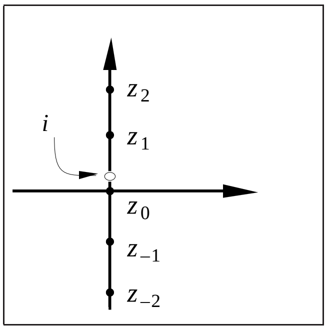


08. i. Si usa la nota formula risolutiva dell'equazione di secondo grado $z_{1,2} = \dfrac{-b+\varepsilon_{1,2}}{2a}$, dove con $\varepsilon_{1,2}$ si intendono le due radici quadrate di $b^2 - 4ac$. In questo caso $b^2 - 4ac = 8i$ le cui radici quadrate sono $\pm(2+2i)$, come visto nel problema precedente. Le soluzioni dell'equazione sono pertanto:

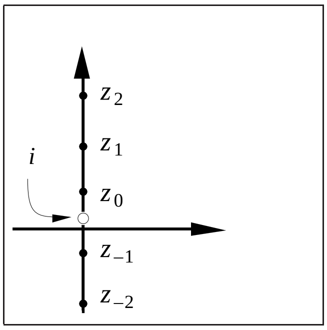
$$z_0 = 1 \quad , \quad z_1 = 2i - 1$$



08. j. Dato che $1 = e^0$, l'equazione può essere scritta come $e^z = e^0$. Da cui $z = 0 + 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$ per la nota periodicità dell'esponenziale complesso.
Le soluzioni sono quindi infinite e sono $z_k = 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Si ha $z_0 = 0$ e gli altri numeri sono puramente immaginari:
$z_1 = 2\pi i \qquad z_{-1} = -2\pi i \qquad z_2 = 4\pi i$ etc.

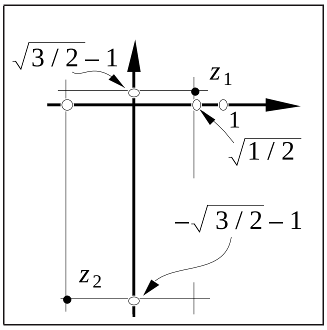


08. k. Dato che $-1 = e^{\pi i}$, l'equazione può essere scritta come $e^z = e^{\pi i}$. Da cui $z = \pi i + 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$ per la periodicità dell'esponenziale complesso.
Le soluzioni sono quindi $z_k = (2k+1)\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$. Sono tutti numeri puramente immaginari:
$z_0 = \pi i \qquad z_1 = 3\pi i \qquad z_{-1} = -\pi i \qquad z_2 = 5\pi i$ etc.



09. a. Si usa la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado $z_{1,2} = \dfrac{-b+\varepsilon_{1,2}}{2a}$, dove, con $\varepsilon_{1,2}$ si intendono le due radici quadrate di $b^2 - 4ac$. Si può calcolare che $b^2 - 4ac = 4 - 4\sqrt{3}i$ e che le sue radici quadrate sono $\pm(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$. Le soluzioni dell'equazione sono allora:

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{1/2} + (\pm\sqrt{3/2} - 1)i$$



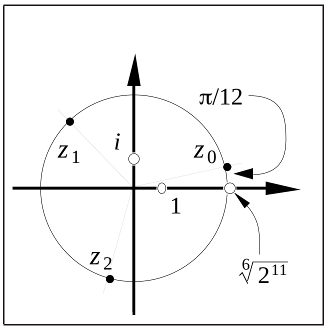
09. b. Scriviamo tutto in forma esponenziale:

$$z^3 = \frac{(\sqrt{3}+i)^6}{(1+i)i} = \frac{(2e^{\pi i/6})^6}{\sqrt{2}e^{\pi i/4} \cdot e^{\pi i/2}} =$$
$$= \frac{2^6}{\sqrt{2}}\, e^{\pi - \pi/4 - \pi/2} = 2^{11/2} e^{\pi i/4}$$

Quindi le soluzioni sono:

$$z_k = 2^{11/6} \cdot e^{\pi i/12 + 2k\pi i/3} \qquad k = 0, 1, 2$$

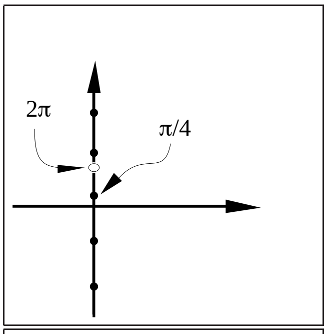
$$z_0 = 2^{11/6} \cdot e^{\pi i/12}$$
$$z_1 = 2^{11/6} \cdot e^{9\pi i/12}$$
$$z_2 = 2^{11/6} \cdot e^{17\pi i/12}$$



09. c. Scriviamo $e^z = 0$ come $e^{a+bi} = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Allora $e^a \cdot e^{bi} = 0$. Dato che $a \in \mathbb{R}$, allora, com'è noto, si ha sempre $e^a \neq 0$. Inoltre $e^{bi} = \cos(b) + i\sin(b)$ e non esiste $b \in \mathbb{R}$ che abbia seno e coseno entrambi nulli. Quindi anche e^{bi} è sempre diverso da 0. Quindi l'equazione non ha soluzioni.

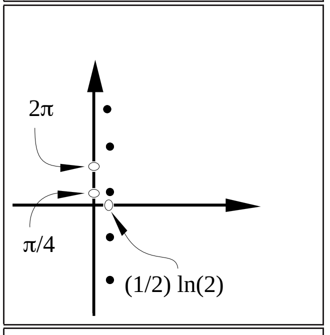
09. d. Si ha: $(\sqrt{2}/2)(1+i) = e^{\pi i/4}$, da cui $e^z = e^{\pi i/4}$.
Per la periodicità dell'esponenziale:

$$z_k = (\pi/4 + 2k\pi)i \qquad (k \in \mathbb{Z})$$



09. e. Si scrive $e^z = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$ o anche $e^z = e^{\ln(\sqrt{2}) + \pi i/4}$.
Le soluzioni sono le stesse della precedente equazione traslate di $\ln(\sqrt{2}) = 1/2\ln(2)$

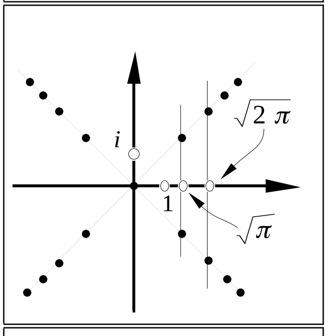
$1/2\ln(2) + (\pi/4 + 2k\pi)i \qquad (k \in \mathbb{Z})$.



09. f. Si scrive $e^{z^2} = e^0$, da cui, per la periodicità dell'esponenziale, si ha $z^2 = 0 + 2k\pi i$ o $z^2 = 2k\pi i$. Bisogna distinguere tra $k > 0$ (per cui $2k\pi i$ ha argomento $\pi/2$ e modulo $2k\pi$) e $k < 0$ (per cui $2k\pi i$ ha argomento $3\pi/2$ e modulo $-2k\pi$). Le radici quadrate di i sono $\pm(1+i)/\sqrt{2}$), quelle di $-i$ sono $\pm(-1+i)/\sqrt{2}$). Le soluzioni sono perciò:

$\pm\sqrt{k\pi}(1+i)$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$ $\qquad \pm\sqrt{-k\pi}(-1+i)$ $(k \in \mathbb{Z}^-)$.

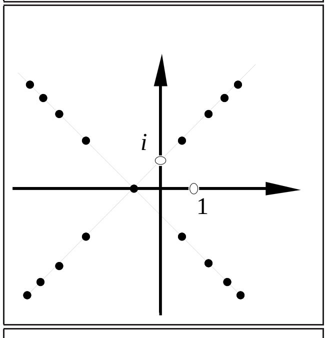
Inoltre (per $k = 0$) anche 0 è soluzione.



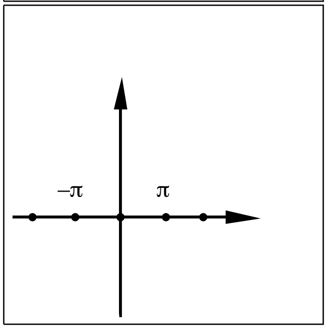
09. g. Si ha $z^2 + 2z + 1 = 2k\pi i$; la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado fornisce $z = -1 + \varepsilon_{1,2}$ dove $\varepsilon_{1,2}$ sono le radici quadrate di $2k\pi i$; il resto è come nell'equazione precedente. Le soluzioni sono pertanto le stesse della precedente equazione traslate di -1:

$-1 \pm \sqrt{k\pi}(1+i)(k \in \mathbb{Z}^+) \qquad -1 \pm \sqrt{-k\pi}(1-i)(k \in \mathbb{Z}^-)$

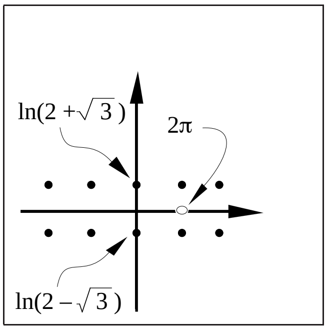
Anche -1 è soluzione.



09. h. L'equazione non ha ulteriori soluzioni complesse oltre alle ben note soluzioni reali: $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.



09. i. $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ da cui $e^{iz} + e^{-iz} = 4$ $\quad e^{iz} + \dfrac{1}{e^{iz}} = 4$
$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0$. Ponendo $y = e^{iz}$ e risolvendo l'equazione di secondo grado in y si trova $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$.
I numeri $2 \pm \sqrt{3}$ sono reali e positivi, la loro forma esponenziale è $2 \pm \sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})e^0$, quindi $e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})e^0$ o anche $e^{iz} = e^{\ln(2 \pm \sqrt{3})}$, da cui $iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$).
In definitiva, le soluzioni sono:
$-i\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).



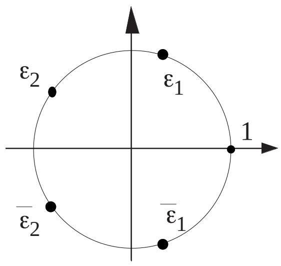
11. Perché abbia le radici 4 e 5/7 deve essere multiplo di $x - 4$ e di $x - 5/7$. Per esempio $P(x) = (x - 4)(x - 5/7)$ soddisfa la richiesta.
12. Se $P(x)$ ha le radici 1 e 2 e grado due, allora deve avere come fattori i polinomi $x - 1$ e $x - 2$, quindi deve potersi scrivere come $P(x) = Q(x)(x - 1)(x - 2)$. Perché abbia grado 2, occorre che Q abbia grado 1, cioè che sia una costante a; quindi $P(x) = a(x - 1)(x - 2)$. Sostituendo 0 a x si ottiene $1 = 2a$, quindi $P(x) = \dfrac{1}{2}(x - 1)(x - 2)$
13. Siano $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ $\qquad Q(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$. Allora:
Se $n > m$, $(P + Q)(x) = (a_0 + b_0) + \cdots a^nx^n$ e ha grado n.
Se $m > n$, $(P + Q)(x) = (a_0 + b_0) + \cdots a^mx^m$ e ha grado m.
Se $m = n$, $(P + Q)(x) = (a_0 + b_0) + \cdots (a^n + b^n)x^n$. Se $a^n + b^n \neq 0$ il grado è n, altrimenti è inferiore, in ogni caso e $\deg(P + Q) \leq m$ e $\deg(P + Q) \leq n$, cioè $\deg(P + Q) \leq \max\{m, n\}$
Si ha: $(P \cdot Q)(x) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + a_nb_mx^{n+m}$, quindi $P \cdot Q$ ha grado $m + n$, dato che che $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$.
14. Dato che il polinomio $x^n - z$ ha esattamente le radici $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, allora lo si decompone come: $x^n - z = (x - z_0) \cdots (x - z_{n-1})$.
Nel secondo membro, il coefficiente di x^{n-1}, come si può calcolare, è $z_0 + \cdots + z_{n-1}$, mentre nel primo membro il coefficiente di x^{n-1} è ovviamente 0 da cui l'uguaglianza cercata.
15. Dividiamo il polinomio per $x - 1$. Si trova come resto 0. Questo prova che 1 è radice. Il quoziente è il polinomio $2x^2 - 5x - 3$ che ha come radici 3 e $-1/2$. Queste sono dunque le altre due radici del polinomio.
16. Dato che $P(x)$ deve avere coefficienti reali, allora deve avere come radici anche $1 - i$ e $-i$. Avendo già quattro radici, ha grado quattro, il minimo possibile, ed è:
$$P(x) = a(x - 1 + i)(x - 1 - i)(x - i)(x + i) \text{ o meglio } P(x) = a(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 1) \quad a \in \mathbb{R}$$
Perché sia $P(1) = 3$ occorre $P(1) = a(1 - 2 + 2)(1 + 1) = 3$ da cui $a = 3/2$
Allora: $P(x) = 3/2(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 1)$.
17. Dato che $P(x)$ ha coefficienti complessi, non è necessario che abbia come radici anche i coniugati di i e $1 + i$, quindi: $\qquad P(x) = a(x - 1 - i)(x - i) \quad a \in \mathbb{C}$
Perché sia $P(1) = 3$ occorre che $P(1) = a(-i)(1 - i) = 3$ da cui:
$$a = \frac{3}{-1 - i} = \frac{3 \cdot (-1 + i)}{(-1 - i)(-1 + i)} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\,i$$
Allora: $P(x) = (-3/2 + 3i/2)(x - 1 - i)(x - i)$.
18. Per avere coefficienti reali, il polinomio deve avere come radice anche $1 - i$ e per avere grado 3 deve avere anche una terza radice per esempio 1. Quindi possiamo prendere il polinomio $P(x) = (x - 1 + i)(x - 1 - i)(x - 1) = ((x - 1)^2 + 1)(x - 1) = (x^2 - 2x + 2)(x - 1)$.
19. Dovrà essere $P(x) = (x - 1 - i)(x - 1 + i)Q(x)$; inoltre $P(i) = (1 - 2i)Q(i) = 1$ da cui $Q(i) = (1/5) + (2/5)i$. Quindi $Q(x)$ non può avere grado 0, perché deve essere reale. Per esempio si può porre $Q(x) = (2/5)x + (1/5)$ per cui $P(x) = ((2/5)x + (1/5))(x^2 - 2x + 2)$.
20. Essendo i polinomi a coefficienti reali, deve essere possibile decomporli in fattori di grado 1 e di grado 2 con discriminante negativo:

a. x^4+1 ha come radici le radici quarte di -1 che sono: $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ e $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$ (a due a due coniugate), quindi si ha:

$$x^4+1=\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\quad\cdot\quad\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=$$
$$=\left[\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\quad\cdot\quad\left[\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

b. x^2+2x+4 è un polinomio di grado due con discriminante negativo, quindi non è ulteriormente scomponibile.

c. x^5-1 ha come radici le radici quinte dell'unità che sono $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \overline{\varepsilon}_1, \overline{\varepsilon}_2$. Si ha perciò:
$x^5-1=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\overline{\varepsilon}_1)(x-\varepsilon_2)(x-\overline{\varepsilon}_2)$ quindi la decomposizione è $(x-1)(x^2-(\varepsilon_1+\overline{\varepsilon}_1)x+\varepsilon_1\overline{\varepsilon}_1)(x^2-(\varepsilon_2+\overline{\varepsilon}_2)x+\varepsilon_2\overline{\varepsilon}_2)$.
Dato che, come si calcola subito, si ha:
$\varepsilon_1=\cos(2\pi/5)+i\sin(2\pi/5)$ $\qquad\varepsilon_2=\cos(4\pi/5)+i\sin(4\pi/5)$
allora la decomposizione in fattori reali è:
$x^5-1=(x-1)(x^2-2x\cos(2\pi/5)+1)(x^2-2x\cos(4\pi/5)+1)$



d. Si ha: $x^6-x^2=x^2(x^4-1)=x^2(x^2-1)(x^2+1)$. Il polinomio x^2+1 non è ulteriormente scomponibile, quindi:
$x^6-x^2=x\cdot x(x-1)(x+1)(x^2+1)$

21. Le radici ventisettesime di un numero reale positivo sono ventisette: una reale e ventisei a due a due complesse coniugate per cui $x^{27}-3$ ha quattordici fattori reali: tredici di grado 2 e uno di grado 1.

22. Si ha $P(x)=a_0(x-x_1)^{2m_1}\cdots(x-x_n)^{2m_n}$ per cui $P(x)$ è il quadrato del polinomio $a(x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_n)^{m_n}$ (a una delle due radici quadrate di a_0). Se $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, l'ipotesi è che il coefficiente direttivo sia positivo. Non occorrono ipotesi sulle radici.

23. a. Sì, per esempio $P(x)=x-ix$.
 b. Sì, per esempio $P(x)=ix^2-ix$.
 c. Sì, per esempio $P(x)=(x-i)(x+i)^2$.
 d. No, ogni potenza di un numero reale è reale.

24. Chiamiamo $P(x)$ il polinomio. Il numero 1 è radice di $P(x)$ perché si ha:
$P(1)=1-5+10-10+5-1+1-4+6-4+1=0$
Calcoliamo le derivate del polinomio e sostituiamo 1:
$P'(x)=11x^{10}-50x^9+90x^8-80x^7+35x^6-6x^5+5x^4-16x^3+18x^2-8x+1$
$\qquad P'(1)=11-50+90-80+35-6+5-16+18-8+1=0$
$P''(x)=110x^9-450x^8+720x^7-560x^6+210x^5-30x^4+20x^3-48x^2+36x-8$
$\qquad P''(1)=110-450+720-560+210-30+20-48+36-8=0$
$P'''(x)=990x^8-3600x^7+5040x^6-3360x^5+1050x^4-120x^3+60x^2-96x+36$
$\qquad P'''(1)=990-3600+5040-3360+1050-120+60-96+36=0$
$P^{IV}(x)=7920x^7-25200x^6+30240x^5-16800x^4+4200x^3-360x^2+120x-96$
$\qquad P^{IV}(1)=7920-25200+30240-16800+4200-360+120-96=24\neq 0$
Quindi la molteplicità è 4.

25. Affinché i sia radice di $P(x)$ occorre che $P(i)=0$, cioè che: $\qquad i^{31}-2i^5+ai+b=0$.
Affinché i abbia molteplicità almeno 2 occorre che $P'(i)=0$.
Dato che $P'(x)=31x^{30}-10x^4+a$, occorre che $\qquad 31\cdot i^{30}-10\cdot i^4+a=0$.
Ma $i^{31}=-i$, $i^5=i$, $i^{30}=-1$ e $i^4=1$, quindi le due condizioni diventano:

$\begin{cases}-3i+ai+b=0\\-41+a=0\end{cases}$ $\qquad$ Si calcola subito che: $\qquad\begin{cases}a=41\\b=-38i\end{cases}$