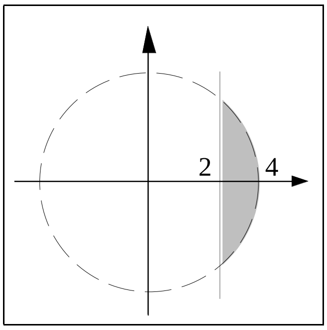
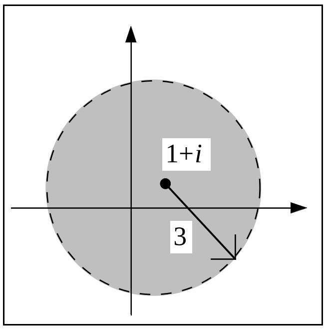
Numeri complessi

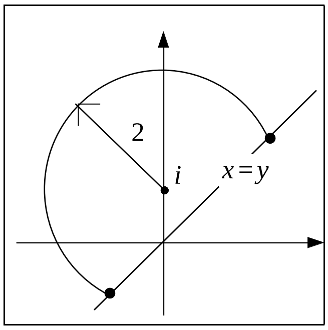
01. a. I numeri complessi z con $\mathrm{Re}\,(z) \geq 2$ sono quelli a destra della retta verticale (retta compresa). Quelli con modulo minore di 4 sono all'interno della circonferenza di centro 0 e raggio 4 (circonferenza esclusa). Quindi l'insieme è quello in grigio, arco (ed estremi dell'arco) escluso, ma segmento (senza estremi) compreso.

b. I numeri complessi z tali che $\mid z-(1+i) \mid < 3$ sono quelli che nel piano hanno distanza da $1+i$ minore di 3, quindi sono quelli all'interno della circonferenza di centro $1+i$ e raggio 3 (circonferenza esclusa).

c. I numeri complessi z con $\mathrm{Im}\,(z) \geq \mathrm{Re}\,(z)$ sono quelli al di sopra della bisettrice principale (retta compresa). Quelli tali che $\mid z-i \mid = 2$ sono sulla circonferenza di centro i e raggio 2. Quindi l'insieme è l'arco di circonferenza segnato (estremi compresi).

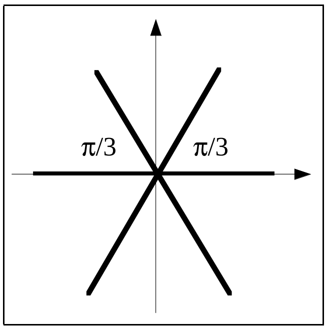
a.


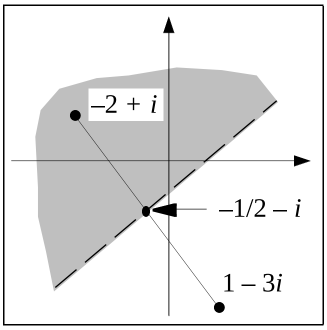
b.


c.


d. Se $z^3 \in \mathbb{R}$, allora $\mathrm{Arg}(z^3) = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ma $\mathrm{Arg}(z^3) = 3\mathrm{Arg}(z)$, quindi $\mathrm{Arg}(z) = k\pi/3$ con $k \in \mathbb{Z}$. Si hanno perciò i numeri di argomento $0, \pi/3, 2\pi/3, \ldots$, cioè sei semirette. Dato che poi anche 0 appartiene all'insieme, le sei semirette sono in pratica l'unione delle tre rette in grassetto.

e. Sono i punti che hanno distanza da $-2+i$ minore di quella da $1-3i$, quindi sono situati nel semipiano individuato dalla retta che è l'asse del segmento che ha come estremi i due numeri complessi. Il punto medio del segmento è $\dfrac{(-2+i)+(1-3i)}{2} = -\dfrac{1}{2} - i$.

d.


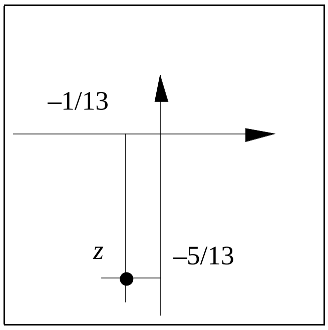
e.


02.

a. Si ha: $\dfrac{1+i}{-3+2i} = \dfrac{(1+i)(-3-2i)}{-(3+2i)(-3-2i)} = \dfrac{-5-i}{13}$.
Da qui Re e Im. Dato che il numero è nel terzo quadrante, un'argomento si può calcolare con l'arcotangente, aggiungendo però π.

$\mathrm{Re}\,(z) = -\dfrac{1}{13}$ $\quad$ $\mathrm{Im}\,(z) = -\dfrac{5}{13}$

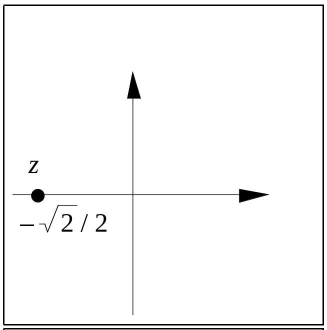
$\mid z \mid = \sqrt{\dfrac{2}{13}}$ $\quad$ $\theta = \arctan\dfrac{-5}{-1} + \pi \simeq 4.515 \simeq 258^0$



b. Il numero è reale negativo, quindi ha argomento π.

$\operatorname{Re}(z) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{Im}(z) = 0$

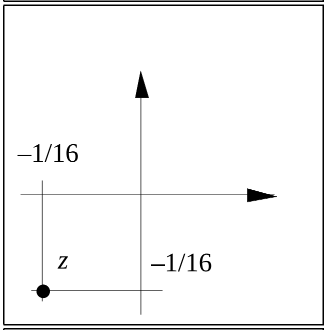
$\mid z \mid = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\theta = \pi$



c. $1+i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/4$, mentre $1+\sqrt{3}i$ ha modulo 2 e argomento $\pi/3$.
Pertanto il numero in questione ha modulo $(\sqrt{2})^5/2^6$ e argomento $5(\pi/4)-6(\pi/3) = -3\pi/4$ che è trigonometricamente equivalente a $5\pi/4$. Quindi:

$\operatorname{Re}(z) = -\dfrac{1}{16}$ $\qquad$ $\operatorname{Im}(z) = -\dfrac{1}{16}$

$\mid z \mid = \dfrac{\sqrt{2}}{16}$ $\qquad$ $\theta = \dfrac{5}{4}\pi$



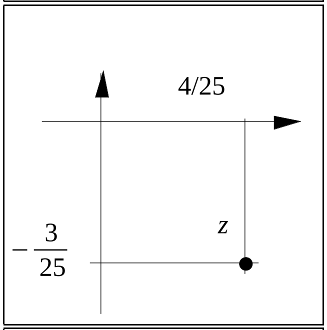
d. Conviene eseguire i calcoli algebricamente:

$$\frac{i}{(1+2i)^2} = \frac{i(1-2i)^2}{(1+2i)^2\,(1-2i)^2} = \frac{4-3i}{25}.$$

L'argomento può essere calcolato con l'arcotangente perché ci troviamo nel quarto quadrante.

$\operatorname{Re}(z) = \dfrac{4}{25}$ $\qquad$ $\operatorname{Im}(z) = -\dfrac{3}{25}$

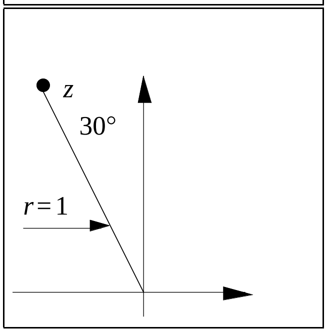
$\mid z \mid = \dfrac{1}{5}$ $\qquad$ $\theta = \arctan(-4/3)$



e. $(1/2) - (\sqrt{3}/2)i$ ha modulo 1 e argomento $-\pi/3$.
La sua potenza 40-esima ha modulo 1 e argomento $-40\pi/3 = -39\pi/3 - \pi/3 = -13\pi - \pi/3 = -12\pi - 4\pi/3$ che è trigonometricamente equivalente a $2\pi/3$ (dato che 12π è multiplo intero di 2π). Perciò:

$\operatorname{Re}(z) = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

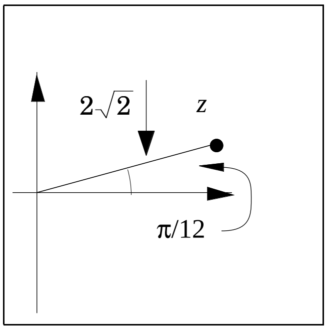
$\mid z \mid = 1$ $\qquad$ $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$



f. $\sqrt{3}+i$ ha modulo 2 e argomento $\pi/6$. Quindi $(\sqrt{3}+i)^{605}$ ha argomento $605\pi/6$ che è trigonometricamente equivalente a $5\pi/6$.
$1-i$ ha argomento $-\pi/4$. L'argomento di $(1-i)^7$ è quindi $-7\pi/4$.
$i^{33} = i^{32}\cdot i = i$ e ha argomento $\pi/2$.
L'argomento totale è $5\pi/6 + 7\pi/4 - \pi/2 = 25\pi/12$ trigonometricamente equivalente a $\pi/12$.

$\operatorname{Re}(z) = 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ $\qquad$ $\operatorname{Im}(z) = 2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

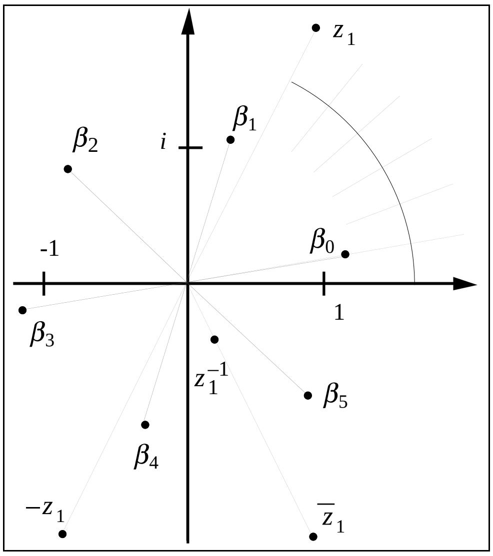
$\mid z \mid = 2\sqrt{2}$ $\qquad$ $\theta = \dfrac{\pi}{12}$

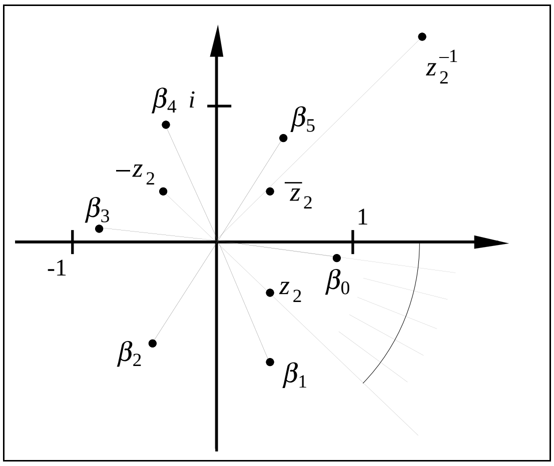


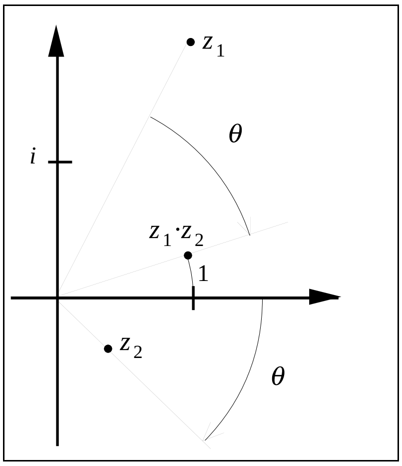
03. Si sa che: $\operatorname{Arg}(z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \pi$ e che $\operatorname{Arg}(\overline{z}_2) = -\operatorname{Arg}(z_2)$. Pertanto:
$\operatorname{Arg}(z_1\cdot\overline{z}_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(\overline{z}_2) = -\pi$.

04. Per quanto riguarda la costruzione dei disegni si osservi che:

- $\overline{z}_1$ e $-z_1$ hanno stesso modulo di z_1 e argomenti rispettivamente opposto e aumentato di π.
- z_1^{-1} ha stesso argomento di $\overline{z}_1$ e modulo $1/2$.
- Le radici seste di z_1 hanno argomento $\sqrt[6]{2}$ che è di poco maggiore di 1. La prima radice β_0 ha argomento pari all'argomento di z_1 diviso per 6. Le altre cinque si disegnano per simmetria.
- Analogamente per z_2 , ma si osservi che z_2^{-1} ha modulo 2. Le radici seste hanno argomento $\sqrt[6]{1/2}$ che è di poco inferiore di 1. Per trovare la prima radice si è diviso per 6 un argomento negativo di z_2.
- Per quanto riguarda $z_1 \cdot z_2$. l'argomento è stato ottenuto aggiungendo all'argomento di z_1 l'argomento (negativo) θ di z_2. Il modulo è ovviamente 1.



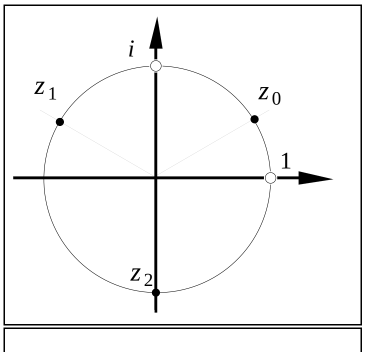




05.

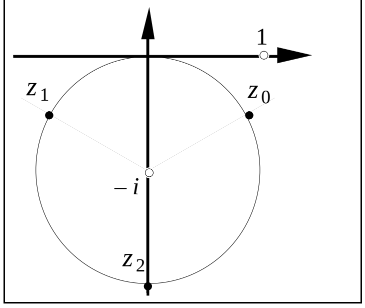
a. Si ha: $i = 1 \cdot e^{(\pi/2)i}$. Le sue radici terze hanno modulo 1 e argomenti $\pi/6 + 2k\pi$ con $k = 0, 1, 2$ e sono quindi:

$$z_0 = e^{\pi i/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$
$$z_1 = e^{5\pi i/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$
$$z_2 = e^{3\pi i/2} = -i$$



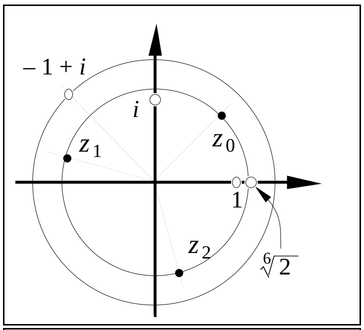
b. Si pone $u = z+i$ e si ottiene l'equazione $u^3 = i$, già risolta al precedente punto. Dato che $z = u - i$, le soluzioni sono quelle dell'equazione precedente a cui è stato però sottratto i.

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \quad , \quad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \quad , \quad z_2 = -2i$$



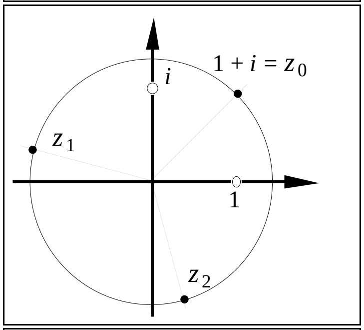
c. Il numero $-1+i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $3\pi/4$, quindi le soluzioni sono $z_i = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot e^{3\pi/12 + 2k\pi/3)i}$. Ponendo $k = 0, 1, 2$ si ottiene:

$z_0 = \sqrt[6]{2}\cdot e^{\pi i/4}$
$z_1 = \sqrt[6]{2}\cdot e^{11\pi i/12}$
$z_2 = \sqrt[6]{2}\cdot e^{19\pi i/12}$



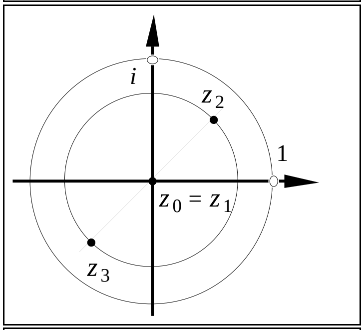
d. Il numero $1+i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/4$, il numero $(1+i)^3$ ha quindi modulo $\left(\sqrt{2}\right)^3$ e argomento $3\pi/4$.Le soluzioni dell'equazione hanno pertanto modulo $\sqrt{2}$ e argomento $3\pi/12 + 2k\pi/3$ per $k = 0, 1, 2$. Per $k = 0$ si ottiene ovviamente $1+i$. Le soluzioni sono:

$$z_0 = 1+i \quad , \quad z_1 = \sqrt{2}\cdot e^{11\pi i/12} \quad , \quad z_2 = \sqrt{2}\cdot e^{19\pi i/12}$$



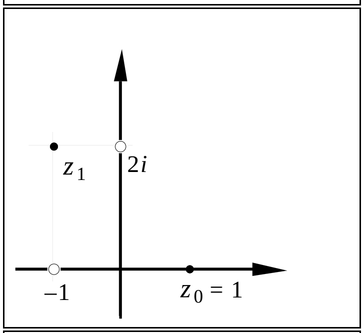
e. Si scrive $z^2(z^2 - i) = 0$. Quindi due radici del polinomio $z^4 - iz^2$ sono 0 le altre sono le radici quadrate di i che ha modulo 1 e argomento $\pi/2$ e sono quindi $\pm e^{\pi/4}$. In conclusione si ha:

$$z_0 = z_1 = 0 \quad , \quad z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad , \quad z_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$



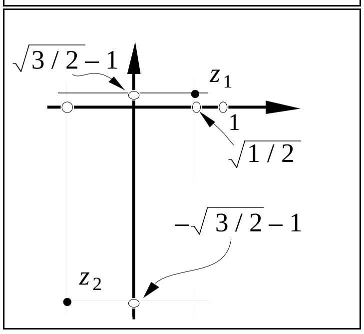
f. Basta usare la classica $z_{1,2} = \dfrac{-b + \varepsilon_{1,2}}{2a}$ (dove, con $\varepsilon_{1,2}$ si intendono le due radici quadrate di $b^2 - 4ac$). In questo caso $b^2 - 4ac = 8i$ le cui radici quadrate sono $\pm(2+2i)$. Le soluzioni dell'equazione sono pertanto:

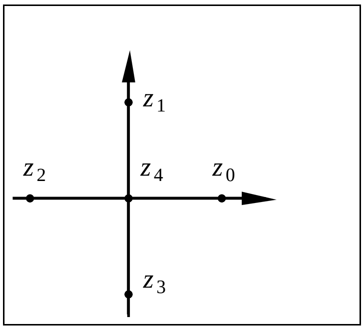
$$z_0 = 1 \quad , \quad z_1 = 2i - 1$$



g. Come la precedente, ma $b^2 - 4ac = 4 - 4\sqrt{3}i$ le cui radici quadrate sono $\pm(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$. Le soluzioni dell'equazione sono allora:

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{1/2} + (\pm\sqrt{3/2} - 1)i$$

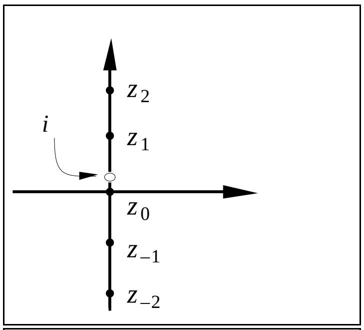




h. Si scrive $z(z^4-1)=0$, quindi quattro delle soluzioni sono le radici quarte dell'unità che sono ± 1 e $\pm i$, la quinta soluzione è 0.

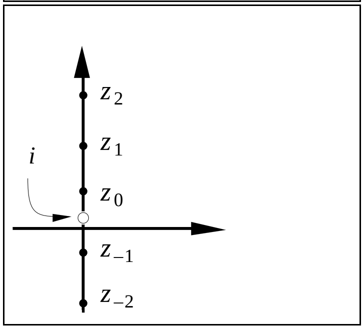
$$z_0 = 1\ ,\ z_1 = i\ ,\ z_2 = -1\ ,\ z_3 = -i\ ,\ z_4 = 0$$

i. Scriviamo $e^z = 0$ come $e^{a+bi} = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Allora $e^a \cdot e^{bi} = 0$. Dato che $a \in \mathbb{R}$, allora, com'è noto, si ha sempre $e^a \neq 0$. Inoltre $e^{bi} = \cos(b) + i\sin(b)$ e non esiste $b \in \mathbb{R}$ che abbia seno e coseno entrambi nulli. Quindi anche e^{bi} è sempre diverso da 0. Quindi l'equazione non ha soluzioni.



j. L'equazione si può scrivere come $e^z = e^{a+bi} = 1$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Ma $e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$ è la forma esponenziale di un numero complesso che ha modulo e^a e argomento b. Questo numero è 1 se e solo se:
- ha argomento 1, cioè $e^a = 1$, da cui $a = 0$
- b è un argomento di 1, cioè $b = 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Le soluzioni sono quindi infinite e sono $z_i = 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$.



k. Si procede come nel caso precedente, ma, in questo caso, il numero -1 ha argomento π, quindi le soluzioni sono $z_i = (2k+1)\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$

06. Per esempio $P(x) = (x-4)(x-5/7)$.

07. Se $P(x)$ ha le radici 1 e 2 e grado due, allora deve avere come fattori i polinomi $x-1$ e $x-2$, quindi deve potersi scrivere come $P(x) = Q(x)(x-1)(x-2)$. Perché abbia grado 2, occorre che Q abbia grado 1, cioè che sia una costante a; quindi $P(x) = a(x-1)(x-2)$. Sostituendo 0 a x si ottiene $1 = 2a$, quindi $P(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)(x-2)$

08. Dividendo il polinomio per $x-1$ si trova come quoziente $2x^2 - 5x - 3$ che ha come radici 3 e $-1/2$.