Numeri complessi, polinomi

NUMERI COMPLESSI

01. Nel piano di Argand-Gauss disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$.

a. $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq 2 \text{ e } |z| < 4\}$
b. $\{z \in \mathbb{C} : |z-(1+i)| < 3\}$
c. $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z) \text{ e } |z-i| = 2\}$
d. $\{z \in \mathbb{C} : z^3 \in \mathbb{R}\}$
e. $\{z \in \mathbb{C} : iz^3 \in \mathbb{R}\}$
f. $\{z \in \mathbb{C} : i+\overline{z} \in \mathbb{R}\}$
g. $\{z \in \mathbb{C} : (1+\overline{z})/|z| = 1\}$
h. $\{z \in \mathbb{C} : |z+2\overline{z}| < 9\}$
i. $\{z \in \mathbb{C} : |z+2-i| < |z-1+3i|\}$
j. $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ e } \mathrm{Arg}(z^4) = \mathrm{Arg}(-z)\}$
k. $\{z \in \mathbb{C} : z^6 = ib \text{ per un } b \in \mathbb{R},\ b < 0\}$
l. $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 4 \text{ e } \mathrm{Re}(z) \geq 0 \text{ e } \mathrm{Arg}(z^6) = \mathrm{Arg}(iz^2)\}$

02. Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento dei seguenti numeri complessi e disegnarli nel piano di Gauss.

a. $\dfrac{1+i}{-3+2i}$
b. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
c. $\dfrac{(1+i)^5}{(1+\sqrt{3}i)^6}$
d. $\dfrac{i}{(1+2i)^2}$
e. $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{45}$
f. $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{605}}{2^{600}(1-i)^7 i^{33}}$
g. $(1-\sqrt{3}i)^9-(1+i)^6$
h. $e^{1726\pi i/3}$
i. e^{1+i}
j. $\sin(\pi/5)-i\cos(\pi/5)$

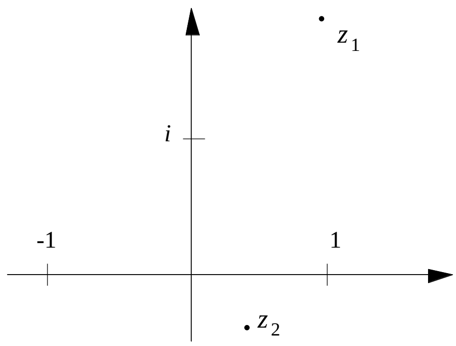
03. Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ e siano z_1 e z_2 le sue due radici quadrate. Provare che $z_1 \cdot \overline{z}_2$ è sempre un numero reale.

04. Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ e siano z_1, z_2 le altre due radici cubiche di z^3 (oltre z). Provare che si ha : $z_1 \cdot z_2 = z^2$

05. Sia $z_0 = (\sqrt{3}+i)/2$. Determinare il minimo $n \in \mathbb{N}$ per cui z_0 sia radice dell'equazione $z^n = 1$.

06. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ l'equazione $z^{10} = a$ ha almeno una soluzione puramente immaginaria.

07. Dato il numero z_1 di modulo 2 disegnato a lato nel piano di Gauss, disegnare anche $\overline{z}_1, -z_1, z_1^{-1}$ e le radici seste di z_1. Ripetere le stesse operazioni anche per il numero z_2 che ha modulo 1/2. Disegnare poi il prodotto $z_1 \cdot z_2$.



08. Determinare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle seguenti equazioni e disegnarle nel piano di Argand-Gauss.

a. $z^3 = i$
b. $(z+i)^3 = i$
c. $z^3 = -1+i$
d. $z^3 = (1+i)^3$
e. $z^4 = iz^2$
f. $iz^2+2z-(2+i) = 0$
g. $iz^2-2z+\sqrt{3} = 0$
h. $z^5 = z$
i. $e^z = 0$
j. $e^z = 1$
k. $e^z = -1$
l. $iz^3 = \dfrac{(\sqrt{3}+i)^6}{1+i}$
m. $e^{z^2} = 1$
n. $e^{z^2+2z+1} = 1$
o. $e^z = (\sqrt{2}/2)(1+i)$
p. $e^z = 1+i$
q. $\sin(z) = 0$
r. $\cos(z) = 2$

POLINOMI

11. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado 2 avente 4 e 5/7 come radici.
12. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tale che : $P(1) = P(2) = 0$, $P(0) = 1$ e $\deg(P) = 2$.
13. Dimostrare che se P e Q sono due polinomi e $\deg(P) = n$ e $\deg(Q) = m$, allora:
    $\deg(P + Q) \leq \max(m, n) \qquad \deg(P \cdot Q) = n + m.$
14. Sia $z \in \mathbb{C}$ e siano $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ le sue radici n-esime ($n \geq 2$). Provare che:
    $z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1} = 0$ (*esercizo teorico*).
15. Verificare che 1 è radice di $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ e trovare le altre due radici.
16. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado 3 avente $1 + i$ come radice e scomporlo in fattori di grado minimo a coefficienti reali.
17. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado 4 avente come radici $1 + i$ e i e tale che $P(1) = 3$.
18. Scrivere un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado 3 tale che $P(1 + i) = 0$, $P(i) = 1$. Perché non ne esiste uno di grado 2 ?
19. Scomporre in fattori a coefficienti reali di grado minimo i polinomi seguenti:
    $$P_1(x) = x^4 + 1 \quad ; \quad P_2(x) = x^2 + 2x + 4 \quad ; \quad P_3(x) = x^5 - 1 \quad ; \quad P_4(x) = x^6 - x^2$$
20. Dire quanti fattori a coefficienti reali ha il polinomio $x^{27} - 3$.
21. Sia $P(x) \in \mathbb{C}[x]$. Dimostrare che se tutte le radici di $P(x)$ hanno molteplicità due, allora $P(x)$ è il quadrato di un altro polinomio di $\mathbb{C}[x]$. Dire quale ulteriore ipotesi occorre per provare la stessa cosa in $\mathbb{R}[x]$.
22. Può un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ a coefficienti non tutti reali avere una radice reale ?
23. Può un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ a coefficienti non tutti reali avere radici tutte reali ?
24. Può un polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ avere due radici coniugate con diversa molteplicità ?
25. Può un numero complesso non reale avere una radice n-esima reale ?
26. Constatato che 1 è radice di $x^{11} - 5x^{10} + 10x^9 - 10x^8 + 5x^7 - x^6 + x^5 - 4x^4 + +6x^3 - 4x^2 + x$, determinarne la molteplicità.
27. Sia $P(x) = x^{31} - 2x^5 + ax + b \in \mathbb{C}[x]$. Determinare $a, b \in \mathbb{C}$ tali che i sia radice di $P(x)$ almeno con molteplicità 2.

Si consiglia di svolgere come test di autovalutazione gli esercizi

01. a.	punti 2
01. b.	punti 3
01. d.	punti 3
02. c.	punti 3
02. i.	punti 2
07.	punti 5
08. d.	punti 3
08. m.	punti 3
17.	punti 3
20.	punti 3