4. DIAGONALIZZAZIONE: Autovalori, autovettori

401. a. Basta calcolare:
$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \Bigg| A\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \Bigg| A\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Bigg| A\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$
Quindi il vettore $(1, 3, -3)$ è autovettore e l'autovalore è 2.
Il vettore $(1, 1, -1)$ non è autovettore
Il vettore $(1, 1, 1)$ è autovettore e l'autovalore è 2.
Il vettore $(1, -1, 1)$ è autovettore e l'autovalore è 6.
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
b. I tre autovettori $(1, 3, -3), (1, 1, 1), (1, -1, 1)$ sono linearmente indipendenti in quanto la matrice P delle loro coordinate ha determinante non nullo.
Dato che tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ formano base, allora abbiamo una base di $\mathbb{R}^3$ tutta costituita da autovettori, pertanto A è diagonalizzabile.

402. a. Per determinare una base per $\ker(f)$ basta risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice. Ha ∞^1 soluzioni e sono $(-z, -z, z)$ al variare di $z \in \mathbb{R}$. Quindi una base per $\ker(f)$ è $(1, 1, -1)$.
b. Eseguiamo il prodotto $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ Quindi $(1, -1, 0)$ è autovettore e l'autovalore relativo è 3.
c. Il fatto che $\ker(f)$ sia diverso da $\{(0, 0, 0)\}$ dice che 0 è autovalore per A. D'altra parte abbiamo appena visto che anche 3 è autovalore. Potrebbe esserci un terzo autovalore non evidente, ma, prima di calcolare il polinomio caratteristico, determiniamo gli autospazi:
• $\boxed{\lambda = 0}$ L'autospazio è il nucleo $L\{(1, 1, -1)\}$.
• $\boxed{\lambda = 3}$ La matrice $A - 3I$ a lato ha evidentemente caratteristica 1, quindi il sistema omogeneo associato ha ∞^2 soluzioni che costituiscono l'autospazio.
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
Le soluzioni sono $(-y + z\ ,\ y\ ,\ z)$, quindi l'autospazio V_3 è $L\{(1, -1, 0), (1, 0, 1)\}$. L'autospazio ha dimensione 2.
Mettendo insieme i tre autovettori, il criterio fondamentale di diagonalizzabilità ci assicura che (anche senza verificarne la lineare indipendenza) $\mathcal{B}$: $(1, 1, -1), (1, -1, 0), (1, 0, 1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$, tutta fatta di autovettori.

403. a. Basta calcolare: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}$
Quindi $(0, 1, 1)$ non è autovettore, mentre $(1, 2, 1)$ è autovettore e l'autovalore è 7.
Il vettore $(0, 0, 0)$ non è autovettore per definizione.
b. Risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice. Si possono subito eliminare la terza riga identica alla prima e la seconda che è proporzionale alla prima.
Il sistema si riduce subito all'unica equazione $-x + 2y + 4z = 0$, è ridotto e ha ∞^2 soluzioni dipendenti da y e z. Le soluzioni $(2y + 4z\ ,\ y\ ,\ z)$ sono i vettori di $\ker(f)$ e si possono scrivere come $y(2, 1, 0) + z(4, 0, 1)$. Perciò i vettori $(2, 1, 0)$ e $(4, 0, 1)$ generano $\ker(f)$. dato che sono linearmente indipendenti in quanto due e non proporzionali, formano base per $\ker(f)$.
c. Dato che il nucleo di f è diverso dallo spazio nullo, allora 0 è un autovalore per A e $\ker(f) = V_0$. Per quanto riguarda la sua molteplicità, visto che $\dim(V_0) \leq$ molteplicità(0) e V_0 ha dimensione 2, allora la molteplicità di $\lambda_1 = 0$ deve essere almeno 2.
Dato che poi, come abbiamo già visto $(1, 2, 1)$ è autovettore e quindi $\lambda = 7$ è autovettore con molteplicità almeno 1. L'unica possibilità affinché la somma delle molteplicità sia 3 è che gli autovalori siano: $\lambda_1 = 0$ con molteplicità 2 $\lambda_2 = 7$ con molteplicità 1
d. A è diagonalizzabile perché, come abbiamo già rilevato:
• $\lambda_1 = 0$ è autovalore con molteplicità 2 e $\dim(V_0) = \dim(\ker(f)) = 2$
• $\lambda_2 = 7$ è autovalore con molteplicità 1 e se la molteplicità è 1, sicuramente $\dim(V_7) = 1$
Una base di autovettori può essere costruita mettendo insieme la base di V_0: $(2, 1, 0)$, $(4, 0, 1)$ e una

base di V_7, per esempio $(1,2,1)$ (che, come abbiamo visto, è autovettore).
La matrice P avrà nelle colonne le coordinate dei vettori della base di autovettori e la matrice diagonale D avrà sulla diagonale gli autovalori corrispondenti. $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

404. A Dato che A è triangolare superiore, il polinomio caratteristico si calcola immediatamente ed è $(1-x)(2-x)(4-x)$. Quindi A ha i tre autovalori distinti $1, 2, 4$, ed è diagonalizzabile per il criterio fondamentale.

B Dato che B è triangolare superiore a blocchi e il blocco superiore è a sua volta triangolare inferiore, il polinomio caratteristico è immediato ed è $(4-x)(1-x)(3-x)$. Quindi B ha i tre autovalori distinti $1, 3, 4$, ed è diagonalizzabile per il criterio fondamentale.

C Dato che C è triangolare superiore, il polinomio caratteristico è immediato ed è $(2-x)^3$. Quindi C ha l'autovalore 2 con molteplicità 3. Se C fosse diagonalizzabile, si avrebbe $\dim(V_2) = 3$, da cui $\varrho(C - 2I) = 0$, cioè $C - 2I = 0$, ma evidentemente $C \neq 2I$, quindi C non è diagonalizzabile.

D La matrice D è diagonalizzabile, dato che è simmetrica.

E Dato che E è triangolare inferiore a blocchi e il blocco inferiore è a sua volta triangolare superiore, il polinomio caratteristico è immediato ed è $x^2(1-x)$. Quindi E ha ha l'autovalore 0 con molteplicità 2. Se fosse diagonalizzabile, si avrebbe $\dim(V_0) = 2$, da cui $\varrho(E - 0I) = 1$, cioè $\varrho(E) = 1$, ma evidentemente $\varrho(E) = 2$ (si vede subito un minore di ordine 2 non nullo), quindi E non è diagonalizzabile.

F Il polinomio caratteristico di F è $-x^3+3$, quindi gli autovalori sono le radici cubiche di 3. Due radici sono non reali. Quindi F non è diagonalizzabile come matrice reale, ma, dato che le radici cubiche di 3 sono distinte, allora è diagonalizzabile come matrice complessa per il criterio fondamentale.

405. a. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\det \left(\begin{array}{cc|c} 1-x & 1 & 2 \\ -2 & -2-x & -2 \\ \hline 0 & 0 & -1-x \end{array}\right) = (-1-x)\Big((1-x)(-2-x)+2\Big) = (-1-x)(x^2+x)$$

Le radici sono quindi: $\lambda_1 = 0$ con molteplicità 1 $\lambda_2 = -1$ con molteplicità 2.

Si ha $\dim(V_0) = 1$, dato che $\lambda_1 = 0$ ha molteplicità 1.

Per dimostrare che A è diagonalizzabile usando il criterio fondamentale occorre verificare che $\dim(V_{-1}) = 2$.
Scriviamo la matrice $A + 1I$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ La matrice ha evidentemente caratteristica 1, quindi $\dim(V_{-1}) = 3-1 = 2$ e questo prova che A è diagonalizzabile.

Per avere una base di autovettori di V_{-1} calcoliamo le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A + 1I$, che si riduce alla sola equazione $2x + y + 2z = 0$.
Due soluzioni linearmente indipendenti sono per esempio $(1,-2,0)$ e $(1,0,-1)$

Per avere un autovettore di V_0 calcoliamo le soluzioni del sistema omogeneo associato a $A - 0I$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} R_2 \to R_2 + 2R_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{cases} x+y+2z = 0 \\ 2z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \begin{cases} x+y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Una soluzione è per esempio $(1,-1,0)$.

I tre vettori $(1,-2,0)$, $(1,0,-1)$, $(1,-1,0)$ sono linearmente indipendenti per il criterio fondamentale di diagonalizzabilità e formano una base di autovettori.

b. P ha nelle colonne le coordinate dei vettori della base di autovettori e D ha nella diagonale gli autovalori corrispondenti. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. Come è noto: $A^{999} = PD^{999}P^{-1}$

Ma $D^{999} = \begin{pmatrix} -1^{999} & 0 & 0 \\ 0 & -1^{999} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Quindi D^{999} è D stessa.

Di conseguenza: $A^{999} = PDP^{-1} = A$

406. Matrice A:

a. Si vede subito che il determinante di A è diverso da zero, quindi $\varrho(A) = 3$, per cui l'unica soluzione del sistema omogeneo associato ad A è quella nulla. Quindi $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$ e l'unica sua base è vuota.

b. $\det \begin{pmatrix} 5-x & 2 & -3 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 2 & 2 & -x \end{pmatrix} = (-1-x)\det \begin{pmatrix} 5-x & -3 \\ 2 & -x \end{pmatrix} = (-1-x)(x^2-5x+6)$

Gli autovalori sono quindi: $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$ tutti con molteplicità 1. Quindi A è diagonalizzabile perché una matrice con tutti autovalori distinti lo è sempre.

c. Calcoliamo gli autovettori. Per ogni autovalore λ gli autovettori sono le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$ che saranno senz'altro ∞^1 in ciascuno dei tre casi:

$\lambda = -1$	$\lambda = 3$	$\lambda = 2$
$A + I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
Una soluzione è $(-2,3,-2)$	Una soluzione è $(3,0,2)$	Una soluzione è $(1,0,1)$

Il criterio fondamentale di diagonalizzabilità ci assicura che (anche senza verificarne la lineare indipendenza) i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$ tutta fatta di autovettori: $(-2,3,-2), (3,0,2), (1,0,1)$

Matrice B:

a. Per trovare $\ker f$ risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice, riducendola:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} R_3 \to R_3 - (1/3)R_1 \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le soluzioni sono ∞^1 e sono $(z, 0, z)$ al variare di $z \in \mathbb{R}$.

Il nucleo ha perciò dimensione 1 e una base per $\ker f$ è per esempio : $(1,0,1)$.

b. Si ha: $\det \begin{pmatrix} 3-x & 2 & -3 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 2 & -1-x \end{pmatrix} = (2-x)\det \begin{pmatrix} 3-x & -3 \\ 1 & -1-x \end{pmatrix} = (2-x)(x^2-2x)$.

Quindi gli autovalori sono: $\boxed{\lambda = 0}$ con molteplicità 1 ; $\boxed{\lambda = 2}$ con molteplicità 2.

- $\boxed{\lambda = 0}$ L'autovalore 0, avendo molteplicità 1 non crea problemi : $\dim(V_0) = 1$.
- $\boxed{\lambda = 2}$ La dimensione di V_2 è data dal numero di soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $B - 2I$, che ha evidentemente ∞^2 soluzioni, quindi $\dim(V_2) = 2$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

È ora chiaro che B è diagonalizzabile, dato che soddisfa il criterio di diagonalizzabilità.

c. Determiniamo una base per ciascun autospazio.

Com'è noto, se 0 è autovalore, allora $V_0 = \ker f$, una base per V_0 è quindi $(1,0,1)$.

Una base per V_2 si ottiene risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $B - 2I$ che si riduce alla sola equazione $x + 2y - 3z = 0$

Due soluzioni linearmente indipendenti sono: $(3,0,1)$, $(2,-1,0)$.

Mettendo insieme i tre vettori, il criterio fondamentale di diagonalizzabilità ci assicura che (anche senza verificarne la lineare indipendenza) i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$ tutta fatta di autovettori: $\mathcal{B} : (1,0,1), (3,0,1), (2,-1,0)$.

407. a. Basta calcolare:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi $(0,2,1,1)$ è autovettore e l'autovalore è 3.

I vettori $(0,0,0,1), (0,1,1,0)$ sono autovettori e l'autovalore è 2.

Il vettore $(0,1,0,0)$ non è autovettore.

b. La matrice è triangolare inferiore a blocchi, quindi: $\det(A - xI) =$

$$= \det \begin{pmatrix} 3-x & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4-x & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1-x & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2-x \end{pmatrix} = (3-x) \cdot \det \begin{pmatrix} 4-x & -2 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} \cdot (2-x) =$$
$$= (3-x)(x^2 - 5x + 6)(2-x)$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 3$ entrambi con molteplicità 2.
Abbiamo già due vettori di V_2 e un vettore di V_3. Occorre un altro vettore di V_3

La matrice $A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ha la prima riga nulla e seconda e terza riga identiche, quindi della matrice del sistema omogeneo associato a $A - 3I$ restano due righe. Riduciamola totalmente:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Basta una soluzione diversa da $(0, 2, 1, 1)$, per esempio $(1, 4, 0, 1)$.
La base richiesta quindi è $(0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 2, 1, 1), (1, 4, 0, 1)$.

408. a. Calcoliamo il polinomio caratteristico: $(3 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda)$

Quindi gli autovalori sono: $\lambda_1 = 3$ (molteplicità 2) $\lambda_2 = 0$ (molteplicità 1).
Il criterio di diagonalizzabilità è verificato per $\lambda_2 = 0$ perché $\dim(V_0) = 1$. Per vedere se A è diagonalizzabile occorre calcolare $\dim(V_3)$.

La matrice $A - 3I$ è $\begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si vede immediatamente che se $k = 1$ la matrice ha caratteristica 1 e quindi $\dim(V_3) = 2$. se invece $k \neq 1$ allora la matrice ha caratteristica 2 e quindi $\dim(V_3) = 1$.
In conclusione la matrice è diagonalizzabile solo se $k = 1$.

b. Poniamo $k = 1$. Abbiamo già la matrice $A - 3I$ e il sistema omogeneo associato si riduce alla sola equazione $-y + z = 0$ che ha le soluzioni (x, z, z). Una base per V_3 è per esempio $(1, 0, 0), (0, 1, 1)$.
Per quanto riguarda V_0, una soluzione non nulla del sistema omogeneo associato ad A è $(1, 2, -1)$.

La matrice P avrà nelle colonne le coordinate dei vettori della base di autovettori e la matrice diagonale D avrà sulla diagonale gli autovalori corrispondenti. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

409. a. Si ha: $\det(A - xI) = (2\sqrt{2} - x) \det \begin{pmatrix} 2-x & 4 \\ 1 & -2-x \end{pmatrix} = (2\sqrt{2} - x)(x^2 - 8)$ Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = -2\sqrt{2}$ (molteplicità 1) $\lambda_2 = 2\sqrt{2}$ (molteplicità 2).

b. Dato che V_1 ha sicuramente dimensione 1 dato che λ_1 ha molteplicità 1, per il criterio fondamentale perché A sia diagonalizzabile occorre che $\dim(V_2) = 2$ cioè che $A - 2\sqrt{2}I$ abbia caratteristica 1.
Si ha:
$A - 2\sqrt{2}I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 2-2\sqrt{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Elimino R_1 ed eseguo $R_1 \leftrightarrow R_2$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2-2\sqrt{2} \\ k & 2-2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$

$R_2 \to R_2 - (k/2)R_1$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2-2\sqrt{2} \\ 0 & 2-2\sqrt{2}-k/2 & 4+(1+\sqrt{2})\,k \end{pmatrix}$

Perché la matrice abbia rango 1 occorre che la seconda riga sia nulla cioè che: $\begin{cases} k/2 = 2 - 2\sqrt{2} \\ 4\,/\,(1+\sqrt{2}) + k = 0 \end{cases}$ e da entrambe le equazioni risulta $k = 4 - 4\sqrt{2}$.

410. a. Vediamo se v_1 può essere autovettore:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3k \\ 5-3k \\ 2 \\ 3-k \end{pmatrix}$$

Dalla terza coordinata si deduce che per essere autovettore occore che sia $\lambda = 2$ e quindi dovrà essere $-1 + 3k = 2$; $5 - 3k = 2$; $3 - k = 2$ e quindi $k = 1$.

Analogo per v_2: $A\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3k\\-3k\\0\\-k\end{pmatrix}$ Dalla terza coordinata si deduce che per essere autovettore occore che sia $\lambda=0$ e quindi dovrà essere $3k=0$ $-3k=0$; $-k=0$ e quindi $k=0$. Ma in tal caso si ha $v_2=0$ e quindi v_2 non può essere autovettore.

Analogo per v_3: $A\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\k\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-0\\2k\\0\end{pmatrix}$ È evidente che può essere autovettore solo se $k=0$ e in tal caso l'autovalore è $\lambda=0$.

b. Abbiamo gli autovalori $\lambda=2$ e $\lambda=0$. Vediamo come sono fatti i relativi autospazi.

- $\boxed{\lambda=0}$ La matrice $A=A-0I$ ha caratteristica 3 (basta eseguire $R_2\to R_2-R_1$ e $R_4\to R_4-R_1$ e ottenere la matrice a lato). Quindi $\dim(V_0)=1$ e abbiamo già un autovettore: $v_3=(-2,2,0,2)$. $\begin{pmatrix}1&-2&0&3\\0&6&0&-6\\0&0&2&0\\0&4&0&-4\end{pmatrix}$

- $\boxed{\lambda=2}$ La matrice $A-2I$ ha caratteristica 1 (ha tre righe proporzionali e una nulla) e quindi $\dim(V_2)=3$ e abbiamo già un autovettore: $v_1=(1,1,1,1)$. Ne occorrono altri 2.
  L'unica riga significativa di $A-2I$ è $\begin{pmatrix}-1&-2&0&3\end{pmatrix}$, quindi occorre trovare altre due soluzioni di $-x-2y+3t=0$.
  Per esempio $(0,0,1,0)$ e $(2,1,0,0)$. I tre vettori di V_2 $(1,1,1,1),(0,0,1,0),(2,1,0,0)$ sono linearmente indipendenti perché la matrice P delle loro coordinate ha caratteristica 3 $P=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
  Il criterio fondamentale di diagonalizzazione ci assicura che i quattro vettori $(-2,2,0,2),(1,1,1,1)$, $(0,0,1,0),(2,1,0,0)$ sono linearmente indipendenti e quindi questa è una base di $\mathbb{R}^4$ tutta fatta da autovettori per A.

411. a. Il polinomio caratteristico è $(3-x)(3-x)-16=x^2-6x-7$ che ha le radici -1 e 7 entrambe con molteplicità 1.
L'autospazio relativo a $\lambda=-1$ ha quindi dimensione 1 ed è dato dalle soluzioni del sistema associato alla matrice $A+I=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}$. Una soluzione è per esempio $v=(1,-1)$.
L'autospazio relativo a $\lambda=7$ ha quindi dimensione 1 ed è dato dalle soluzioni del sistema associato alla matrice $A-7I=\begin{pmatrix}-4&4\\4&-4\end{pmatrix}$. Una soluzione è per esempio $w=(1,1)$.

b. Associamo la matrice a un'applicazione lineare $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.
Dato che v e w sono autovettori allora si ha: $f(v)=-v$ $f(w)=7w$
E quindi si ha $f^{100}(v)=(-1)^{100}v=v=(1,-1)$ $f^{100}(w)=7^{100}w=(7^{100},7^{100})$

c. Esprimiamo $(1,0)$ come combinazione lineare di v e w:
$(1,0)=a(1,-1)+b(1,1)$ da cui $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$. Si ha quindi: $(1,0)=\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}w$ da cui:

$$f^{100}(1,0)=\frac{1}{2}f^{100}(v)+\frac{1}{2}f^{100}(w)=\frac{1}{2}(1,-1)+\frac{1}{2}(7^{100},7^{100})=\left(\frac{7^{100}+1}{2}\ ,\ \frac{7^{100}-1}{2}\right)$$

412. La matrice A è diagonalizzabile perché è simmetrica. Per lavorare su A, associamo la matrice A a un'applicazione lineare $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$. Non è necessario calcolare il polinomio caratteristico perché evidentemente A ha caratteristica 1, dato che ha tutte le righe proporzionali.
Quindi $\det(A)=0$ e $\lambda=0$ è autovalore. Inoltre V_0 è definito dall'equazione $x+2y-z+t=0$, quindi V_0 ha dimensione 3 (e pertanto 0 ha molteplicità 3).
Una sua base è per esempio $(2,-1,0,0),(0,1,2,0),(0,0,1,1)$.
Per quanto riguarda l'altro autovettore, la matrice è simmetrica, ha tutte le righe proporzionali e le colonne identiche alle righe. Si vede quindi subito che ognuna delle righe o delle colonne (per esempio $(1,2,-1,1)$) è autovettore. Calcolando $f(1,2,-1,1)$ si ottiene $(7,14,-7,7)$, quindi l'autovalore è 7.
La matrice P si ottiene mettendo le coordinate dei vettori in colonna e la matrice D è la matrice diagonale che ha nella diagonale tutti gli autovalori nell'ordine corrispondente. $P=\begin{pmatrix}2&0&0&1\\-1&1&0&2\\0&2&1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&7\end{pmatrix}$

413. a. Basta risolvere il sistema omogeneo associato ad A:

$$\begin{cases} 2x & = 0 \\ -3x & = 0 \\ 2x+y+2z-t & = 0 \\ 2x+y+t & = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x & = 0 \\ y+2z-t & = 0 \\ y+t & = 0 \end{cases} \quad E_2 \to E_2 - E_3 \begin{cases} x & = 0 \\ 2z-2t & = 0 \\ y+t & = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi ∞^1 e sono $(0\ ,\ -t\ ,\ t\ ,\ t)$.
I vettori del nucleo sono pertanto i multipli di $(0,-1,1,1)$ che ne costituisce una base.

b. $\det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -x & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2-x & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (2-x)(-x)(2-x)(1-x)$ Gli autovalori sono quindi:

$\lambda_1 = 2$ molteplicità: 2 $\quad 1 \le \dim(V_2) \le 2 \quad \Rightarrow \quad \dim(V_2)$ può essere 1 o 2
$\lambda_2 = 0$ molteplicità: 1 $\quad 1 \le \dim(V_0) \le 1 \quad \Rightarrow \quad \dim(V_0) = 1$
$\lambda_3 = 1$ molteplicità: 1 $\quad 1 \le \dim(V_1) \le 1 \quad \Rightarrow \quad \dim(V_1) = 1$

Il criterio di diagonalizzabilità è verificato per $\lambda_2 = 0$ e per $\lambda_3 = 1$. Per dimostrare che A è diagonalizzabile occorre verificare che $\dim(V_2) = 2$.

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ Riduciamo la matrice $A - 2I$ per calcolare le soluzioni del sistema omogeneo associato.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Elimi-} \\ \text{niamo} \\ R_1 \text{ e } R_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} R_2 \to R_2 + \frac{2}{3} R_1 \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono ∞^2 e sono $(2t, -3t, z, t)$ che si scrivono anche come:
$t(2,-3,0,1) + z(0,0,1,0)$, quindi i due vettori $(2,-3,0,1)$, $(0,0,1,0)$ costituiscono una base per V_2 che ha dimensione 2.

Possiamo ora concludere che A è diagonalizzabile.

$\boxed{\lambda_2 = 0}$ Una base per V_0 è già stata trovata, dato che $V_0 = \ker(f)$. La base è $(0,-1,1,1)$.

$\boxed{\lambda_3 = 1}$ Occorrono le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice $A - I$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 + 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_4 \to R_4 + R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono ora evidenti e sono $(0,0,t,t)$. Una base per V_1 è quindi $(0,0,1,1)$.
Una base di autovettori è pertanto: $(2,-3,0,1)$, $(0,0,1,0)$, $(0,-1,1,1)$, $(0,0,1,1)$

c. P ha nelle colonne le coordinate degli autovettori trovati, la matrice D ha gli autovalori nello stesso ordine.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. Il vettore $(0,0,0,1)$ è differenza di autovettori,
cioè $(0,0,0,1) = (0,0,1,1) - (0,0,1,0)$, quindi:
$f^{2001}(0,0,0,1) = f^{2001}(0,0,1,1) - f^{2001}(0,0,1,0)$
ma $f^{2001}(0,0,1,1) = 1^{2001}(0,0,1,1) \qquad f^{2001}(0,0,1,0) = 2^{2001}(0,0,1,0)$.
Quindi $f^{2001}(0,0,0,1) = (0,0,1,1) - (0,0,2^{2001},0) = (0,0,1-2^{2001},1)$

414. Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$\det \left(\begin{array}{c|cc|c} k-x & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1-x & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3-x & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5-x \end{array}\right) = (k-x)(5-x)(x^2-4x).$$

Quindi gli autovalori sono: $k\ ,\ 0\ ,\ 4\ ,\ 5$

Se $k \neq 0,4,5$, la matrice ha quattro autovalori distinti di molteplicità 1 e quindi è diagonalizzabile.
Vediamo i tre casi particolari:

Se $k = 0$, l'autovalore 0 ha molteplicità 2, ma la matrice $A - 0I$ ha caratteristica 3 come si vede dalla sottomatrice 3×3 indicata, quindi A non è diagonalizzabile.

$$A - 0I = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Se $k = 4$, l'autovalore 4 ha molteplicità 2, e la matrice $A - 4I$ ha caratteristica 2 dato che ha una riga nulla e due proporzionali, quindi A è diagonalizzabile.

$$A - 4I = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $k = 5$, l'autovalore 5 ha molteplicità 2, e la matrice $A - 5I$ ha caratteristica 2 dato che ha due righe nulle, quindi A è diagonalizzabile.

$$A - 5I = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In conclusione A è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$, tranne che per $k = 0$.

415. a. Moltiplichiamo A per v posto in colonna:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h - k \\ k \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix}$$

Evidentemente per essere autovettore occorre che il primo elemento $2h-k$ sia nullo, cioè che $k = 2h$. In questo caso si ha: $v = (0, h, 2h, 2h)$ e $A \cdot v = (0 \quad 2h \quad 4h \quad 4h)^T$.
In conclusione v è autovettore se $k = 2h$ con $h, k \neq 0$. In questi casi $\lambda = 2$.

- Scegliamo per esempio $h = 1$ e $k = 2$, cioè $v = (0, 1, 2, 2)$.

b. Per determinare V_2 occorre risolvere il sistema omogeneo che ha come matrice dei coefficienti $A-2I$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_3 \\ \text{ed elimino le} \\ \text{righe nulle} \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} R_1 \to R_1{+}2R_2 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il sistema è ridotto e ha le ∞^2 soluzioni $(2y - t \, , \, y \, , \, t \, , \, t)$. Per avere una base di V_2 comprendente v basta prendere un qualunque vettore di V_2 non proporzionale a v, per esempio, per $y = 0$ e $t = 1$, $w = (-1, 0, 1, 1)$. I due vettori $v = (0, 1, 2, 2)$ e $w = (-1, 0, 1, 1)$ formano una base per V_2 perché sono due vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione 2.

c. Occorre calcolare tutti gli autovalori di A. Approfittiamo della struttura triangolare a blocchi di A.

$$\det(A{-}xI) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -x & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3-x & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1-x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 1 & -x \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 3-x & -1 \\ 3 & -1-x \end{pmatrix} =$$

$= (x^2 - x - 2) \cdot (x^2 - 2x)$
Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = 2$ (molteplicità 2) , $\lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$ entrambi con molteplicità 1.
Abbiamo già una base per V_2. Cerchiamone una per ciascuno degli altri due autospazi. Entrambi gli autospazi avranno dimensione 1.

$\boxed{\lambda = 0}$: Risolviamo il sistema omogeneo che ha come matrice dei coefficienti $A - 0I = A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \to R_1 + R_2 \\ R_2 \to (-1/2)R_2 \\ R_3 \to (1/3)R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \to R_2 + 2R_3 \\ R_1 \to R_1 - 2R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Il sistema è totalmente ridotto e ha, come previsto, ∞^1 soluzioni che sono $(t/3 \, , \, -t/3 \, , \, t/3 \, , \, 1)$. Per esempio per $t = 3$ otteniamo l'autovettore $(1, -1, 1, 3)$ che forma una base per V_0.

$\boxed{\lambda = -1}$: Risolviamo il sistema omogeneo che ha come matrice dei coefficienti $A-(-1)I = A+I$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

L'ultima equazione è $3z = 0$ e la penultima fornisce $t = 0$. Le due prime equazioni diventano quindi $2x + 2y = 0$; $x + y = 0$. Il sistema ha, come previsto, ∞^1 soluzioni che sono $(-y, y, 0, 0)$. Per esempio per $y = 1$ otteniamo l'autovettore $(-1, 1, 0, 0)$ che forma una base per V_{-1}.

Qundi $v = (0,1,2,2)$ può essere completato a base composta da autovettori mediante i tre vettori $(-1,0,1,1), (1,-1,1,3), (-1,1,0,0)$. Questa è base di $\mathbb{R}^4$ per il criterio fondamentale, dato che è unione di basi di autovettori.

d. La matrice P avrà nelle colonne le coordinate di una base composta da autovettori.

Perché P abbia la struttura richiesta, dovremo modificare un po' la base. Basterà cambiare verso al secondo vettore e scambiare il primo col secondo. Alla fine si avrà $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

416. a. Il polinomio caratteristico è $x^2 - 3x + 4$ e ha le radici 4 e -1.
Gli autovalori sono reali e hanno molteplicità 1, quindi A è diagonalizzabile sia come matrice reale che come matrice complessa. Cerchiamo una base di autovettori:

$\boxed{\lambda = 4}$ Il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ha le soluzioni (y, y).

Un autovettore è $(1,1)$.

$\boxed{\lambda = -1}$ Il sistema omogeneo associato alla matrice $A + I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ha le soluzioni $(3t, -2t)$.

Un autovettore è $(3,-2)$. Una base di autovettori è quindi per esempio $(1,1), (3,-2)$.

La matrice P ha nelle colonne le coordinate degli autovettori trovati, la matrice D ha gli autovalori nello stesso ordine. $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Si ha: $P^{-1}AP = D$, cioè $A = PDP^{-1}$ e anche $A^{99} = PD^{99}P^{-1}$.
La matrice P è già stata determinata. L'inversa di P si calcola immediatamente e si ha $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}$. Inoltre $D^{99} = \begin{pmatrix} 4^{99} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pertanto:

$$A^{99} = PD^{99}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4^{99} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^{99} + 3 & 3 \cdot 4^{99} - 3 \\ 2 \cdot 4^{99} - 2 & 3 \cdot 4^{99} + 2 \end{pmatrix}$$

b. Il polinomio caratteristico è $P(x) = x^2$
L'unico autovalore è quindi 0 con molteplicità 2. L'autospazio si ricava risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 0I = A$. Dato che questo sistema ha evidentemente ∞^1 soluzioni, allora (V_0) ha dimensione 1 ed è diversa dalla molteplicità, quindi non esiste base di autovettori e A non è diagonalizzabile né come matrice reale, né come matrice complessa.

c. Il polinomio caratteristico è $x^2 - 2x + 2$ e ha le radici $\lambda = 1 \pm i$ entrambe con molteplicità 1, quindi A non è diagonalizzabile come matrice reale, ma lo è come matrice complessa, dato che ha due autovalori distinti.

$\boxed{\lambda = 1 + i}$ Il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - (1+i)I$ ha tra le soluzioni $(i, 1)$. Questo è una autovettore.

$\boxed{\lambda = 1 - i}$ L'autovalore è il coniugato del precedente, un autovettore è il coniugato del precedente, $(-i, 1)$.

Una base di autovettori è quindi $(i,1), (-i,1)$.

Per scrivere la matrice P basta mettere in colonna le coordinate dei vettori mentre D è la matrice che ha nella diagonale gli autovalori nell'ordine corrispondente. $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$

Per calcolare A^{99} scriviamo $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Dopo aver calcolato P^{-1} si scrive:

$$A^{99} = PD^{99}P^{-1} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+i)^{99} & 0 \\ 0 & (1-i)^{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo $(1+i)^{99} = \left(\sqrt{2}e^{\pi i/4}\right)^{99} = \sqrt{2}\, 2^{48} e^{3\pi i/4} = \sqrt{2}\, 2^{48} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{49}\,(-1+i)$

Analogamente (è il coniugato) $(1-i)^{99} = 2^{49}\,(-1-i)$. Pertanto:

$$A^{99} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} 2^{49} \begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = 2^{48} \begin{pmatrix} -1-i & -1+i \\ -1+i & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= 2^{48} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 2^{49} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

417. a. Il polinomio caratteristico è $(x-i)^2(x+i)$ e ha le radici $\lambda = i$ e $\lambda = -i$ con molteplicità rispettivamente 2 e 1.

- $\boxed{\lambda = i}$ Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - iI$ si trova $V_i = L\{(1, 1-i, 0), (0, 1, 1)\}$.
- $\boxed{\lambda = -i}$ Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A + iI$ si trova: $V_{-i} = L\{(1, 1+i, 0)\}$

Quindi A è diagonalizzabile, dato che, per matrici complesse, il criterio di diagonalizzabilità si riduce alla condizione che per ogni λ si abbia $\dim(V_\lambda) = \text{molteplicità}(\lambda)$

Una base di autovettori è quindi $(1, 1-i, 0), (0, 1, 1), (1, 1+i, 0)$.

La matrice P si ottiene mettendo le coordinate dei vettori in colonna e la matrice D è la matrice diagonale che ha nella diagonale tutti gli autovalori nell'ordine corrispondente.

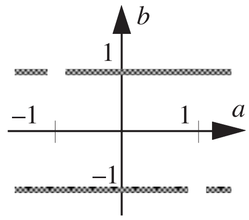
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1-i & 1 & 1+i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

418. Il polinomio caratteristico è $(x-1)(x^2-b^2)$. Gli autovalori sono $1, b, -b$. A seconda della possibilità che coincidano, si possono considerare quattro casi diversi:

1. $\boxed{b \neq 0, 1, -1}$ I tre autovalori sono distinti quindi A è diagonalizzabile.
2. $\boxed{b = 0}$ L'autovalore $\lambda = 0$ ha molteplicità 2. Ma $\varrho(A - 0I) = 1$ **per ogni** a. e quindi $\dim(V_0) = 3 - \varrho(A - 0) = 2$. In conclusione, se $b = 0$, A è diagonalizzabile per ogni a.
3. $\boxed{b = 1}$ L'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità 2. Come si verifica subito, la caratteristica di $A - 1I$ è 1 se $a = -1$ ed è 2 se $a \neq -1$. Quindi A è diagonalizzabile se $a = -1$ e non se $a \neq -1$.
4. $\boxed{b = -1}$ L'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità 2. Come si verifica subito, la caratteristica di $A + 1I$ è 2 se $a = 1$ ed è 2 se $a \neq 1$. Quindi A è diagonalizzabile se $a = 1$ e non se $a \neq 1$.

In conclusione A non è diagonalizzabile solo nei seguenti casi:
$b = 1$ e $a \neq -1$
$b = -1$ e $a \neq 1$

La situazione può essere sintetizzata nel disegno dove le coppie (a, b) per cui A non è diagonalizzabile sono colorate in grigio.



419 a. Evidentemente A ha caratteristica 1, quindi $\det(A) = 0$ e $\lambda_1 = 0$ è autovalore. L'autospazio relativo è definito dall'equazione $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$, quindi V_0 ha dimensione $n-1$ (e pertanto 0 ha molteplicità almeno $n-1$). Una sua base è per esempio
$(1, -1, 0, ..., 0), (0, 1, -1, ..., 0), ..., (0, ...0, 1, -1, 0), (0, ..., 0, 1, -1)$.
È anche chiaro che $(1, 1, 1, ..., 1)$ è autovettore dato che $f(1, 1, 1, ..., 1) = (n, n, n, ..., n)$ e che quindi n è l'altro autovalore e ha molteplicità 1. In conclusione:
Il polinomio caratteristico è $\pm(\lambda - n)\lambda^{n-1}$ (col segno $\pm$ a seconda che n sia pari o dispari) e una base di autovettori è per esempio
$(1, -1, 0, ..., 0), (0, 1, -1, ..., 0), ..., (0, ...0, 1, -1, 0), (0, ..., 0, 1, -1), (1, 1, 1, ..., 1)$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & ... & 0 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & n \end{pmatrix}$$

b. Dato che $B + I = A$ ha caratteristica 1 , allora $\lambda_1 = -1$ è autovalore e come sopra ha molteplicità $n-1$. Analogamente $(1, 1, 1, ..., 1)$ è autovettore, ma stavolta l'autovalore è $\lambda_2 = n - 1$ con molteplicità 1.
L'autospazio relativo a $\lambda_1 = -1$ è definito, come in A, dall'equazione $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ e ha quindi dimensione $n-1$. Una sua base è la stessa trovata per V_0 in A.

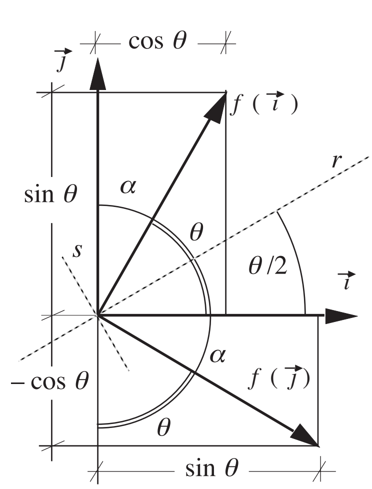
Analogamente $(1,1,1,...,1)$ è autovettore relativo a $\lambda_2 = n-1$.
Una base di autovettori è per esempio la stessa determinata per A.
P è la stessa trovata per A, D è invece quella a lato.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & -1 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & -1 & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & n-1 \end{pmatrix}$$

420. a. Il polinomio caratteristico è $x^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = x^2 - 1$ e non dipende da θ. Dato che A ha i due autovalori distinti 1 e -1, allora è sempre diagonalizzazbile.

b. Si ha:
$A - 1I = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix}$. Il sistema omogeneo associato ha ∞^1 soluzioni. Una soluzione è $(\sin\theta\ ,\ 1-\cos\theta)$. Questo vettore genera V_1. Un'altro generatore (proporzionale al primo, anche se non in modo evidente) è $(1+\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$.
$A + 1I = \begin{pmatrix} \cos\theta + 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta + 1 \end{pmatrix}$. Il sistema omogeneo associato ha ∞^1 soluzioni. Una soluzione è $(\sin\theta\ ,\ -1-\cos\theta)$. Questo vettore genera V_{-1}. Un'altro generatore (proporzionale al primo, anche se non in modo evidente) è $(\cos\theta - 1\ ,\ \sin\theta)$.
Gli autovettori sono quelli dei due autospazi (escluso naturalmente il vettore nullo).

c. Chiamiamo α l'angolo $\pi/2 - \theta$.
Come si vede dal disegno, il vettore $f(\overrightarrow{\imath})$ forma angolo α con $\overrightarrow{\jmath}$ e ugualmente il vettore $f(\overrightarrow{\jmath})$ forma angolo α con $\overrightarrow{\imath}$, quindi $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ sono stati riflessi attorno alla bisettrice r dei vettori $\overrightarrow{\imath}$ e $f(\overrightarrow{\imath})$, cioè del vettore che forma un angolo di $\theta/2$ con $\overrightarrow{\imath}$. Di conseguenza gli autovettori relativi a $\lambda = 1$ sono i vettori direzionali della retta r attorno a cui la f riflette. Un vettore direzionale per la bisettrice r si può trovare sommando $\overrightarrow{\imath}$ con $f(\overrightarrow{\imath})$ (dato che hanno lo stesso modulo e cioè 1) ed è perciò $(1,0) + (\cos\theta\ ,\ \sin\theta) = (1+\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$, che è, come abbiamo visto, autovettore per $\lambda = 1$. Gli autovettori relativi a $\lambda = -1$ sono quelli della retta s ortogonale alla retta r, visto che in riflessione sono trasformati nel loro opposto. In effetti, come si verifica subito, gli autovettori relativi a $\lambda = -1$ sono ortogonali agli autovettori relativi a $\lambda = 1$.



431. Come si può facilmente calcolare, i vettori di $\mathcal{C}$ sono combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$. Infatti si ha:
$(1,2,1) = 1\cdot(1,0,2) + 1\cdot(0,2,-1)$ $\qquad (1,4,0) = 1\cdot(1,0,2) + 2\cdot(0,2,-1)$.
Ortonormalizziamo le due basi col metodo di Gram-Schmidt:

$$\begin{array}{lll} (1,0,2) & \longrightarrow & (1,0,2)/\sqrt{5} \\ (0,2-1) & \longrightarrow & (0,2,-1) - \Big((1,0,2)/\sqrt{5}\cdot(0,2,-1)\Big)(1,0,2)/\sqrt{5} = (2/5\ ,\ 2\ ,\ -1/5) \\ (2/5\ ,\ 2\ ,\ -1/5) & \longrightarrow & (2,10,-1)/\sqrt{105} \\ (1,2,1) & \longrightarrow & (1,2,1)/\sqrt{6} \\ (1,4,0) & \longrightarrow & (1,4,0) - \Big((1,2,1)/\sqrt{6}\cdot(1,4,0)\Big)(1,2,1)/\sqrt{6} = (-1/2\ ,\ 1\ ,\ -3/2) \\ (-1/2\ ,\ 1\ ,\ -3/2) & \longrightarrow & (-1,2,-3)/\sqrt{14} \end{array}$$

Le basi ortonormalizzate sono $\mathcal{B}_1 : \dfrac{(1,0,2)}{\sqrt{5}}\ ,\ \dfrac{(2,10,-1)}{\sqrt{105}}$ e $\mathcal{C}_1 : \dfrac{(1,2,1)}{\sqrt{6}}\ ,\ \dfrac{(-1,2,-3)}{\sqrt{14}}$.

432. Cerchiamo due vettori linearmente indipendenti ortogonali a v_1 e v_2, cioè risolviamo il sistema in $v = (x,y,z,t)$
$\begin{cases} v\cdot(1,0,-1,1) = 0 \\ v\cdot(1,1,1,0) = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x - z + t = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x - z + t = 0 \\ y + 2z - t = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = z - t \\ y = -2z + t \end{cases}$
Due soluzioni linearmente indipendenti sono: $(-1,1,0,1)$, $(1,-2,1,0)$. Questi potrebbero essere v_3

e v_4, dato che sono ortogonali a v_1 e a v_2. Occorre però che siano tra loro ortogonali, quindi poniamo $v_3 = (-1,1,0,1)$ e cerchiamo un vettore di $L\{v_3, v_4\}$ ortogonale a v_3.
Un vettore di $L\{v_3, v_4\}$ è del tipo $a(-1,1,0,1) + b(1,-2,1,0) = (-a+b\ ,\ a-2b\ ,\ a\ ,\ b)$. Perché sia ortogonale a v_3 occorre che $(-a+b\ ,\ a-2b\ ,\ a\ ,\ b)\cdot(-1,1,0,1) = 0$, cioè che $2a - 2b = 0$. Per esempio, per $a = 1$ e $b = 1$, si ottiene $v_4 = (0,-1,1,1)$.

433. La prima colonna ha modulo 1, quindi può far parte di una matrice ortogonale. La seconda colonna deve essere ortogonale alla prima cioè si deve avere $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},*\right) = 0$ e si vede subito che il numero mancante deve essere $-2/3$.
In questo modo anche la seconda colonna ha modulo 1, quindi può far parte di una matrice ortogonale. Per quanto riguarda l'ultima colonna, dato che la matrice è 3×3, è sufficiente procedere per via geometrica e calcolare $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\wedge\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. In conclusione:
$P = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ Dato che P è ortogonale, allora P^{-1} è semplicemente la trasposta di P. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

434. Poniamo, per semplicità: $a = a_{31}$ $\quad b = a_{22}$ $\quad c = a_{32}$
$$P = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & * \\ 2/3 & b & * \\ a & c & * \end{pmatrix}$$
La prima colonna deve avere modulo 1, quindi si deve avere $4/9 + 4/9 + a^2 = 1$ e cioè $a = \pm 1/3$.
Anche la seconda colonna deve avere modulo 1, quindi si deve avere $4/9 + b^2 + c^2 = 1$ e cioè $\underline{b^2 + c^2 = 5/9}$.
Ma, la seconda colonna deve essere ortogonale alla prima quindi si deve avere $(-2/3)(2/3) + (2/3)b + ac = 0$ e cioè $\underline{2b + 3ac = 4/3}$.
Risolviamo il sistema di secondo grado in b, c delle due equazioni sottolineate. Dato che avrà due soluzioni, per evitare confusione tra i vari simboli $\pm$, conviene risolverlo due volte: una volta per $a = 1/3$ e una volta per $a = -1/3$.
- $a = 1/3$. Si trova: $b = 1/3$; $c = 2/3$ e $b = 11/15$; $c = -2/15$
- $a = -1/3$. Si trova: $b = 1/3$; $c = -2/3$ e $b = 11/15$; $c = 2/15$

Quindi abbiamo quattro possibilità per completare la prima e la seconda colonna.
Per quanto riguarda la terza, dato che deve avere modulo 1 e deve essere ortogonale alle prime due, ci sono ogni volta due possibilità che si possono trovare per esempio col prodotto vettoriale delle prime due colonne.
Per esempio, per il caso $a = 1/3$; $b = 1/3$; $c = 2/3$ eseguiamo $(-2/3, 2/3, 1/3)\wedge(2/3, 1/3, 2/3) = (1/3, 2/3, -2/3)$, quindi la terza colonna può essere $[1/3\ \ 2/3\ \ -2/3]^T$ oppure la sua opposta $[-1/3\ \ -2/3\ \ 2/3]^T$.
$$\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & \pm 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & \pm 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & \mp 2/3 \end{pmatrix}$$
In definitiva ci sono otto possibili matrici. Eseguiti i conti, le altre sei sono:
$$\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & \mp 1/3 \\ 2/3 & 11/15 & \pm 2/15 \\ 1/3 & -2/15 & \mp 14/15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & \mp 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & \mp 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & \mp 2/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & \pm 1/3 \\ 2/3 & 11/15 & \mp 2/15 \\ -1/3 & 2/15 & \mp 14/15 \end{pmatrix}$$

435. a. La dimensione di V è evidentemente 2. Per trovare una base ortogonale per V si può partire da un suo vettore qualunque per esempio $(1,0,-1)$ e trovarne un altro (x,y,z) che soddisfi (oltre l'equazione di V: $x - 2y + z = 0$) la condizione $(x,y,z)\cdot(1,0,-1) = 0$ cioè $x - z = 0$. Per esempio si trova $(1,1,1)$. La base così ottenuta è ortogonale; per renderla ortonormale basta normalizzare ciascun vettore e si ha la base ortonormale: $(1,0,-1)/\sqrt{2}$, $(1,1,1)/\sqrt{3}$.

b. La dimensione di W è evidentemente 2. Per trovare una base ortogonale per W si può iterare il procedimento già seguito per V e partendo dal vettore $(1,0,0,1)$ determinare successivamente un qualunque vettore ortogonale a $(1,0,0,1)$, per esempio $(0,1,2,0)$ e successivamente $(5,-4,2,-5)$ (ortogonale a entrambi). La base ortonormale così trovata è:
$(1,0,0,1)/\sqrt{2}$ $\quad (0,1,2,0)/\sqrt{5}$ $\quad (5,-4,2,-5)/\sqrt{70}$

c. Lo spazio U ha dimensione 3. Una base ortonormale per U si trova come per W ed è
$(1,0,-1,0,0)/\sqrt{2}$ $\quad (0,0,0,2,1)/\sqrt{5}$ $\quad (5,5,5,2,-4)/\sqrt{95}$

d. Calcoliamo innanzitutto la dimensione di Z scrivendo la matrice delle cordinate dei vettori che lo generano e riducendola. La matrice ha caratteristica 2 e quindi $\dim(Z) = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice ha caratteristica 2 e quindi $\dim(Z) = 2$. Come base di W conviene scegliere $(1, 1, 0, 1), (0, -1, 1, 1)$ in quanto $(1, 1, 0, 1) \cdot (0, -1, 1, 1) = 0$

A questo punto per avere una base ortonormale per Z basta normalizzare i due vettori: $(1, 1, 0, 1)/\sqrt{3}$, $(0, -1, 1, 1)/\sqrt{3}$

441. Moltiplichiamo A per il vettore $(2, -1, 0)$ (trasposto). Otteniamo $(6, -3, 0)$, quindi il vettore è autovettore e l'autovalore è 3.
Analogamente moltiplicando A per il vettore $(0, 1, 1)$ si ottiene $(0, 3, 3)$ e l'autovalore è sempre 3.
L'autospazio V_3 non può avere dimensione 3, perché in tal caso coinciderebbe con $\mathbb{R}^3$ e ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ sarebbe autovettore, cosa evidentemente non vera. Quindi V_3 ha dimensione 2 perché contiene due vettori linearmente indipendenti.
Ci devono essere pertanto un altro autovalore e un altro autospazio.
Dato che A è simmetrica, l'altro autospazio deve essere ortogonale a V_3, quindi un suo autovettore (x, y, z) deve essere tale che $(x, y, z) \cdot (2, -1, 0) = 0$ e $(x, y, z) \cdot (0, 1, 1) = 0$. Una soluzione non nulla del sistema lineare è per esempio $(1, 2, -2)$ e effettivamente moltiplicando A per il vettore $(1, 2, -2)$ (trasposto) otteniamo $(6, -12, 12)$, quindi l'altro autovalore è 6.

442. a. Dato che A ha caratteristica 1 e quindi determinante 0, allora un suo autovalore è 0. Esso ha molteplicità 2, perché l'autospazio ha dimensione 2, dato che $\varrho(A) = \varrho(A - 0I)$=1.
L'autospazio è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato ad A che si può ridurre subito alla sola equazione $-x + 2y - z = 0$. Le soluzioni sono $(2y - z, y, z)$ $(y, z \in \mathbb{R})$.
Una base per V_0 è $(2, 1, 0), (-1, 0, 1)$, ma non è ortogonale. Per avere una base ortogonale, scegliamo come primo vettore $(2, 1, 0)$ e, come secondo, un vettore di V_0, e cioè del tipo $(2y - z, y, z)$, ortogonale a $(2, 1, 0)$, cioè tale che $(2y - z, y, z) \cdot (2, 1, 0) = 0$ per esempio $(-1, 2, 5)$. Una base ortonormale per V_0 è quindi per esempio $(2, 1, 0)/\sqrt{5}$, $(-1, 2, 5)/\sqrt{30}$.
Per quanto riguarda l'altro autovalore λ, occorrerebbe determinarlo e risolvere il sistema omogeneo associato ad $A - \lambda I$, ma si può usare il fatto che $V_\lambda \perp V_0$ e cercare un vettore ortogonale sia a $(2, 1, 0)$ che a $(-1, 2, 5)$, per esempio $(1, -2, 1)$. Moltiplichiamo A per il vettore $(1, -2, 1)$ (trasposto). Otteniamo $(-6, 12, -6)$, quindi l'autovalore λ è -6 e una base ortonormale per V_{-6} è $(1, -2, 1)/\sqrt{6}$. Una base ortonormale di autovettori è allora:
$(2, 1, 0)/\sqrt{5}$ $\quad (-1, 2, 5)/\sqrt{30}$ $\quad (1, -2, 1)/\sqrt{6}$

b. Usando la base ortonormale trovata sopra, come matrici P e D possiamo scegliere

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

443. A. Il polinomio caratteristico di A è $x(x - 3)(x + 2)$. Gli autospazi si calcolano al solito modo e sono:
$V_0 = L\{(1, 1, -2)\}$ $\quad V_3 = L\{(1, 1, 1)\}$ $\quad V_{-2} = L\{(1, -1, 0)\}$
Dato che i tre autospazi hanno tutti dimensione 1, i tre vettori sono automaticamente a due a due ortogonali. Per avere una base ortonormale di autovettori, basta solo normalizzarli. La base è
$(1, 1, -2)/\sqrt{6}$ $\quad (1, 1, 1)/\sqrt{3}$ $\quad (1, -1, 0)/\sqrt{2}$.
La matrice ortogonale P ha già determinante 1 per cui non occorrono ulteriori aggiustamenti:

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 \\ -2\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

B. Il polinomio caratteristico è $(x + 1)^2(x - 5)$. Gli autospazi sono:
$V_5 = L\{(1, 2, -1)\}$ $\quad V_{-1} = \{(x, y, z) \,:\, x + 2y - z = 0\}$
Occorre una base ortonormale per ciascuno di essi:
Per quanto riguarda V_5, basta solo normalizzare il generatore. Si ottiene $(1, 2, -1)/\sqrt{6}$.
Scegliamo un vettore di V_{-1}, per esempio $(1, 0, 1)$, poi cerchiamo un secondo vettore di V_{-1} ortogonale al primo, cioè (x, y, z) tale che $x + z = 0$ e $x + 2y - z = 0$, per esempio $(-1, 1, 1)$.

Adesso basta normalizzare i due vettori e si ottiene: $(1,0,1)/\sqrt{2}$, $(-1,1,1)/\sqrt{3}$. Ora possiamo scrivere P e D:

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si è dovuto cambiare segno alla prima colonna di P affinché P abbia determinante positivo (e quindi sarà 1).

C. Non è necessario calcolare il polinomio caratteristico, perché evidentemente C ha caratteristica 1 e cioè determinante 0, quindi 0 è autovalore. Inoltre V_0 è definito dall'equazione $x + 2y - z + t = 0$, quindi V_0 ha dimensione 3 (e pertanto 0 ha molteplicità 3).
Per quanto riguarda l'altro autovalore, dato che l'autospazio è ortogonale a V_0, allora i coefficienti dell'equazione che definisce V_0 forniscono l'autovettore $(1,2,-1,1)$. Dato che moltiplicando A per il vettore $(1,2,-1,1)$ (trasposto) si ottiene $(7,14,-7,7)$, allora l'autovalore è 7. Si può calcolare al solito modo una base ortogonale per V_0. Una è per esempio $(2,-1,0,0), (1,2,5,0), (1,2,-1,-6)$.
Per avere una base ortonormale basta solo normalizzarli. Inoltre $V_7 = L\{(1,2,-1,1)\}$
Ora si scrive P, ma affinché abbia determinante 1 occorre cambiare segno al vettore della base di V_7.

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{42} & -1/\sqrt{7} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{42} & -2/\sqrt{7} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{42} & 1/\sqrt{7} \\ 0 & 0 & -6/\sqrt{42} & -1/\sqrt{7} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

444. A. Come nella matrice C dell'esercizio precedente, $\lambda = 0$ è autovalore e l'autospazio relativo è definito dall'equazione $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$, quindi V_0 ha dimensione $n-1$ e $\lambda = 0$ ha molteplicità $n-1$. Una sua base è per esempio
$(1,-1,0,...,0), (0,1,-1,...,0), ..., (0,...0,1,-1,0), (0,...,0,1,-1)$.
È anche chiaro che $(1,1,1,...,1)$ è autovettore dato che $\varphi(1,1,1,...,1) = (n,n,n,...,n)$ e che quindi n è l'altro autovalore, con molteplicità 1. Occorre però una base ortogonale per V_0. La più semplice è per esempio la seguente, ottenuta partendo col primo vettore e sostituendo i successivi via via con vettori ortogonali a tutti i precedenti.
$(1,-1,0,...,0)$, $(1,1-2,...0)$, $(1,1,1,-3,0,...)$ etc.
Per avere una base ortonormale basta solo normalizzarli.
$(1,-1,0,...,0)/\sqrt{2}$, $(1,1-2,...0)/\sqrt{6}$, $(1,1,1,-3,0,...)/\sqrt{12}$ etc.
Una base ortonormale di V_n è evidentemente $\sqrt{n}/n(1,1,1,...,1)$. Ora è immediato scrivere P e si vede subito che $\det(P) > 0$, quindi $\det(P) = 1$.

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \cdots & 1/\sqrt{n} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \cdots & 1/\sqrt{n} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & \cdots & 1/\sqrt{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\sqrt{n} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & n \end{pmatrix}$$

B. Dato che $B = A - I$, gli autovalori di B si hanno sottraendo 1 a quelli di A e sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = n-1$ con la stessa molteplicità e cioè rispettivamente $n-1$ e 1.

Gli autospazi sono gli stessi identici trovati al punto precedente e così pure le basi ortonormali e la matrice P. La matrice D è invece quella a lato.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & -1 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & -1 & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & n-1 \end{pmatrix}$$

451. a. La forma è
$Q(x,y,z,t) = [x\ y\ z\ t] \cdot A \cdot [x\ y\ z\ t]^T = x^2 + y^2 + 4xy + 2z^2 + 2t^2 + 2zt$.

b. Dato che la matrice è a blocchi, il polinomio caratteristico di A è il prodotto dei polinomi caratteristici dei singoli blocchi. Il polinomio è $\Big((x-3)(x+1)\Big) \cdot \Big((x-3)(x-1)\Big)$. Avendo autovalori sia positivi che negativi, la forma è non definita.

c. Dato che gli autovalori di A sono $-1, 1, 3$, gli autovalori di $A + \alpha I$ sono $-1+\alpha$, $1+\alpha$, $3+\alpha$. La matrice è definita positiva se sono tutti e tre positivi, cioè se $\alpha > 1$ e $\alpha > -1$ e $\alpha > -3$. In definitiva, se $\alpha > 1$.

452. La forma matriciale di Q è: $Q(x,y,z) = (x\ y\ z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Riduciamo la matrice A per righe e per colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ C_2 \to C_2 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \to R_3 - kR_2 \\ C_3 \to C_3 - kC_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-k^2 \end{pmatrix}$$

Per il teorema di Sylvester gli autovalori di A hanno gli stessi segni di $1, 1, 3-k^2$. In conclusione:
Se $-3 < k < 3$ la forma è definita positiva.
Se $k = \pm 3$ la forma è semidefinita positiva.
Se $k < -3$ o $k > 3$ la forma è indefinita.

453. a. Si ha: $Q(x,y,z) = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & k & 4 \\ 0 & 4 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

b. I minori principali sono i determinanti delle tre matrici incorniciate e devono essere tutti positivi, cioè si deve avere:

$$k > 0 \qquad k^2 - 9 > 0 \qquad k^3 - 25k > 0$$

La prima condizione $k > 0$, implica subito che la seconda sia $k > 3$ e che la terza sia $k^2 > 25$, cioè $k > 5$.
In definitiva, A è definita positiva solo se $k > 5$.

454. A. Riduciamo A per righe e per colonne in modo da determinare una matrice diagonale avente una diagonale con gli stessi segni degli autovalori di A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_2 \to R_2 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 \to C_3 - C_1 \\ C_2 \to C_2 - C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché a_{22} dipende da k, conviene scambiare R_2 con R_3 e quindi C_2 con C_3 per continuare la riduzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \to R_3 + R_1 \\ C_3 \to C_3 + C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

L'ultima matrice, per il teorema di inerzia di Sylvester, ha tre autovalori dello stesso segno di $1, 1$ e $a - 2$. In conclusione:

- Se $k > 2$, A ha tre autovalori positivi, quindi A è definita positiva.
- Se $k = 2$, A ha due autovalori positivi e uno nullo, quindi A è semidefinita positiva.
- Se $k < 2$, A ha due autovalori positivi e uno negativo, quindi A è non definita.

B. Eseguiamo su B l'algoritmo gaussiano per righe e per colonne per determinare una matrice diagonale avente una diagonale con gli stessi segni degli autovalori di B. Iniziamo con $R_2 \to R_2 - 2R_1$ (e $C_2 \to C_2 - 2C_1$) e poi $R_3 \to R_3 - R_1$ (e $C_3 \to C_3 - C_1$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-8 & k-6 \\ 0 & k-6 & k-2 \end{pmatrix}$$

Se $k = 8$, si esegue $R_1 \leftrightarrow R_2$ e $C_1 \leftrightarrow C_2$ e con $R_3 \to R_3 - (1/3)R_2$ (e di conseguenza anche $C_3 \to C_3 - (1/3)C_2$) si ottiene alla fine la matrice a lato

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

La matrice ottenuta B e ha quindi autovalori dello stesso segno di quelli di B, quindi B ha due autovalori positivi e uno negativo.

Se $k \neq 8$, si continua con $R_3 \to R_3 - ((k-6)/(k-8))R_2$ e con $C_3 \to C_3 - ((k-6)/(k-8))C_2$ ottenendo la matrice a lato

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & (2k-20)/(k-8) \end{pmatrix}$$

Possiamo ora usare il teorema di Sylvester e concludere:

- Se $k > 10$ ci sono tre autovalori positivi, quindi B è definita positiva.
- Se $k = 10$ ci sono due autovalori positivi e uno nullo, quindi B è semidefinita positiva.
- Se $8 < k < 10$ ci sono due autovalori positivi e uno negativo, quindi B è non definita.
- Se $k \leq 8$ ci sono due autovalori positivi e uno negativo, quindi B è non definita.

455. A titolo di esempio vengono usati diversi criteri per determinare i caratteri di definizione, lavorando, se necessario, sulla matrice associata alla forma quadratica tramite la base canonica.

a. Gli autovalori della matrice associata sono $0, 1/2, 3/2$. Quindi la forma è semidefinita positiva.
b. Si scrive anche come $(x+y)^2 + z^2$ ed è quindi semidefinita positiva.
c. Gli autovalori della matrice associata sono $0, 1/2, -1/2$. Quindi la forma è non definita.
d. Gli autovalori della matrice associata sono $1, -1/2, 1/2$. Quindi la forma è non definita.
e. Gli autovalori della matrice associata sono $-1, 3, 0$. Quindi la forma è non definita.
f. Il polinomio caratteristico della matrice associata è $(x-1)(x^2 - x - 1/4)$. Un autovalore è 1 e si vede subito che l'equazione di secondo grado ha due soluzioni di segno opposto. Quindi la forma è non definita.
g. La matrice associata è $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. I tre minori principali della matrice sono tutti positivi e, per il criterio dei minori principali, ciò basta a garantire che essa è definita positiva.
h. Il polinomio caratteristico della matrice associata è $x^3 - 6x^2 + 6x + 7$ e ha due variazioni e una permanenza, quindi, per la regola di Cartesio, ha due autovalori positivi e uno negativo perciò è non definita.
i. È non definita dato che, per esempio, $Q(1,0,0) = 1$ e $Q(0,0,1) = -1$.

456. Eseguendo il prodotto di matrici si trova $Q(x,y,z) = x^2 + 2xy + y^2 + z^2$. Dato che si può scrivere $Q(x,y,z) = (x+y)^2 + z^2$, allora Q è semidefinita positiva. Osserviamo che Q è associata alla matrice *simmetrica* a lato.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$