4. DIAGONALIZZAZIONE: Autovalori, autovettori

- F 401. Dati i vettori $u_1 (1, 3, -3)$, $u_2 (1, -1, -1)$, $u_3 (1, 1, 1)$, $u_4 (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$
- Dire quali di essi sono autovettori per A e determinare l'autovalore associato. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
 - In base ai dati acquisiti, dire se A è diagonalizzabile.
- F 402. È data la matrice simmetrica A .
- Determinare una base per il sottospazio $\ker(f)$ dove f è l'applicazione lineare associata alla matrice A .
 - Verificare che $(1, -1, 0)$ è autovettore per A .
 - In base ai dati acquisiti e senza calcolare il polinomio caratteristico di A , determinare una base di $\mathbb{R}^3$ tutta costituita da autovettori per A .
- $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
- F 403. È data la matrice A .
- Dire quali dei vettori $(0, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 0, 0)$ sono autovettori per A .
 - Determinare una base per il sottospazio $\ker(f)$ dove f è l'applicazione lineare associata alla matrice A .
 - Dedurre dai calcoli precedenti tutti gli autovalori di A e la loro molteplicità.
 - Dire perché A è diagonalizzabile e determinare una matrice diagonale $D \in M_{33}(\mathbb{R})$ e una matrice invertibile $P \in M_{33}(\mathbb{R})$ tali che $AP = PD$.
- $$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
- F 404. Usando i criteri noti, dire quali delle seguenti matrici sono diagonalizzabili, come matrici a elementi reali o a elementi complessi.
- $$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- F 405. a. Dire perché A è diagonalizzabile e determinare una base di $\mathbb{R}^3$ tutta costituita da autovettori per A .
- Scrivere una matrice P invertibile e una D diagonale tali che $P^{-1}AP = D$.
 - Calcolare A^{999} .
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
- F 406. Sono date le due matrici $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ Per ciascuna di esse:
- Determinare una base per $\ker(f)$ dove f è l'applicazione lineare associata alla matrice.
 - Dire se la matrice è diagonalizzabile e perché.
 - Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per la matrice.
- F 407. a. Dire quali dei seguenti vettori sono autovettori per la matrice $A \in M_{44}(\mathbb{R})$:
- $$(0, 2, 1, 1), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0)$$
- $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
- Scelti gli autovettori determinati al punto precedente, scrivere una base di $\mathbb{R}^4$ tutta fatta di autovettori che comprenda questi vettori.
- F 408. Data la matrice $A \in M_{33}(\mathbb{R})$ dipendente da $k \in \mathbb{R}$.
- $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
- Dire per quale k è diagonalizzabile A .
 - Per tale k scrivere una matrice invertibile P e una diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.
- C 409. Data la matrice $A \in M_{33}(\mathbb{R})$
- $$A = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ k & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
- Determinarne tutti gli autovalori e la loro molteplicità.
 - Dire per quali k è diagonalizzabile e perché.
- C 410. Sono dati i vettori $v_1 = (1, 1, 1, k)$ $v_2 = (0, 0, 0, k)$ $v_3 = (-2, 2, k, 2)$ e la matrice A
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
- Per ognuno dei vettori v_1, v_2, v_3 determinare i k per i quali il vettore è autovettore per la matrice A e dire qual è l'autovalore corrispondente.
 - Scrivere una base di $\mathbb{R}^4$ tutta fatta da autovettori per A che comprenda gli autovettori determinati sopra.

- F 411. È data la matrice $A \in M_{22}(\mathbb{R})$. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
- Determinare due autovettori v e w linearmente indipendenti per A .
 - Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice A , calcolare $f^{100}(v)$ e $f^{100}(w)$.
 - Scrivere $(1, 0)$ come combinazione lineare di v e w e quindi calcolare $f^{100}(1, 0)$.
- C 412. Provare che è diagonalizzabile la matrice A e diagonalizzarla (determinare cioè P matrice invertibile e D matrice diagonale tali che $P^{-1}AP = D$).
 Osservazione: Non è necessario calcolare il polinomio caratteristico. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- C 413. È data l'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ associata alla matrice A . $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Determinare una base per $\ker(f)$
 - Dire perché A è diagonalizzabile e scrivere una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per A .
 - Scrivere una matrice P invertibile e una D diagonale, tali che $AP = PD$.
 - Calcolare $f^{2001}(0, 0, 0, 1)$.
- C 414. È data la matrice A dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.
 Per ogni $k \in \mathbb{R}$ dire se A è diagonalizzabile e **perché**. $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
- C 415. Sono dati la matrice $A \in M_{44}(\mathbb{R})$ e il vettore $v = (0, h, k, k) \in \mathbb{R}^4$ dipendente da $h, k \in \mathbb{R}$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
- Dire per quali $h, k \in \mathbb{R}$ il vettore v è autovettore e specificare l'autovalore relativo λ .
 • Per le tre domande successive scegliere h, k per cui v è autovettore.
 - Scrivere una base per l'autospazio V_λ comprendente v .
 - Completare il vettore v a base di $\mathbb{R}^4$ **tutta fatta di autovettori per A** .
 - Determinare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$ in modo che P sia fatta come a lato. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$
- A 416. Chiamata A la matrice 2×2 in ognuno dei tre casi seguenti, dire se A è diagonalizzabile come matrice a elementi reali o a elementi complessi.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
 - $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
 - $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- In caso positivo diagonalizzare A , ovvero scrivere una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$ e, mediante l'uso di P e D , calcolare A^{99} .
- A 417. Dire perché è diagonalizzabile la matrice A a elementi complessi e diagonalizzarla (determinare cioè P matrice invertibile e D matrice diagonale tali che $P^{-1}AP = D$). $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1+i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$
- A 418. È data la matrice reale A dipendente da due parametri $a, b \in \mathbb{R}$. Per ogni coppia di $a, b \in \mathbb{R}$ dire se è diagonalizzabile. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & b \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$
- A 419. Provare che per ogni $n \geq 2$ sono diagonalizzabili le seguenti matrici di $M_{nn}(\mathbb{R})$ e diagonalizzarle (determinare cioè P matrice invertibile e D matrice diagonale tali che $P^{-1}AP = D$).
- La matrice $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ in cui ogni elemento è 1 ($a_{ij} = 1$ per ogni i, j)
 - La matrice $B \in M_{nn}(\mathbb{R})$ in cui ogni elemento è 1, tranne la diagonale che è nulla, ($b_{ij} = 1$ per $i \neq j$ e $b_{ij} = 0$ per $i = j$), cioè $B = A - I$.
- A 420. a. Dimostrare che la matrice $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ è sempre diagonalizzabile per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ e determinare tutti gli autovettori di A . $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$
- b. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ associata ad A . Identificato $\mathbb{R}^2$ con V_2 mediante una base ortonormale $\vec{i}, \vec{j}$ di V_2 , dare un'interpretazione geometrica degli autovettori di A in funzione di θ .

4. DIAGONALIZZAZIONE: Basi ortonormali, matrici ortogonali

F 431. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalla base $\mathcal{B} : (1, 0, 2), (0, 2, -1)$. Verificare che anche $\mathcal{C} : (1, 2, 1), (1, 4, 0)$ è base per V e ortonormalizzare le due basi mediante l'algoritmo di Gram-Schmidt.

F 432. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare euclideo, completare i due vettori ortogonali $v_1(1, 0, -1, 1), v_2(1, 1, 1, 0)$ a base ortogonale di $\mathbb{R}^4$, mediante due vettori v_3, v_4 .

C 433. Dire perché è possibile completare la matrice $P \in M_{33}(\mathbb{R})$ in modo che sia ortogonale e abbia determinante positivo e completarla, indi calcolare P^{-1} .

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & * \\ 2/3 & 2/3 & * \\ 1/3 & * & * \end{pmatrix}$$

C 434. Data la matrice reale incompleta $P \in M_{33}(\mathbb{R})$, completarla in tutti i modi possibili in modo che sia ortogonale.

$$P = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & * \\ 2/3 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

F 435. Determinare una base ortonormale per ognuno dei seguenti spazi vettoriali.

- a. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$
- b. $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z = t\}$
- c. $U = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 : x + z = 2y = t - 2u\}$
- d. $Z = L\{1, 1, 0, 1\}, (1, 0, 1, 2), (0, -1, 1, 1)\}$

4. DIAGONALIZZAZIONE: Matrici simmetriche e teorema spettrale

F 441. Verificare che i due vettori $(2, -1, 0), (0, 1, 1)$ sono autovettori per la matrice A aventi lo stesso autovalore e determinare tale autovalore. Senza calcolarlo direttamente, ma usando il teorema spettrale, trovare un altro autovalore e un altro autovettore.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

F 442. Data la matrice simmetrica A .

- a. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per A .
- b. Scrivere una matrice ortogonale P e una diagonale D tali che $P^T A P = D$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

F 443. Diagonalizzare le seguenti matrici simmetriche reali mediante una matrice ortogonale a determinante positivo (determinare cioè P matrice ortogonale con determinante 1 e D matrice diagonale tali che $P^T A P = D$ etc.).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A 444. Diagonalizzare le seguenti matrici simmetriche reali per mezzo di una matrice ortogonale avente determinante 1.

- A matrice $n \times n$ tutta costituita da 1 ($a_{ij} = 1, \forall i, j$)
- B matrice $n \times n$ tutta costituita da 1 tranne la diagonale che è nulla, ($a_{ij} = 1, \forall i \neq j, a_{ii} = 0, \forall i$), cioè $B = A - I$.

4. DIAGONALIZZAZIONE: Forme quadratiche

F 451. È data la matrice simmetrica $A \in M_{44}(\mathbb{R})$

- a. Scrivere la forma quadratica $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ associata ad A tramite la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
- b. Determinare il carattere di definizione di Q .
- c. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la matrice $A + aI$ è definita positiva.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

F 452. Scrivere in forma matriciale la forma quadratica $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2kyz$ dipendente da $k \in \mathbb{R}$ e dire per ogni $k \in \mathbb{R}$ che carattere di definizione ha (usare criterio di Sylvester).

C 453. Data la forma quadratica $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

$$Q(x, y, z) = kx^2 + 6xy + ky^2 + kz^2 + 8yz$$

a. Scriverla in forma matriciale.

b. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ è definita positiva, usando il criterio dei minori principali.

- C 454. Studiare usando il teorema di inerzia di Sylvester il carattere di definizione e la segnatura degli autovalori delle matrici simmetriche A e B al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & k-4 & k-4 \\ 1 & k-4 & k-1 \end{pmatrix}$$

- F 455. Determinare il carattere di definizione delle seguenti forme quadratiche definite su $\mathbb{R}^3$, scegliendo ogni volta il metodo più opportuno.

a. $x^2 + y^2 + xy$

b. $x^2 + 2xy + y^2 + z^2$

c. $xy + xz + yz$

d. $x^2 + yz$

e. $3x^2 - y^2$

f. $y^2 + z^2 - xy$

g. $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz$

h. $x^2 + 4xy + 2y^2 + 2yz + 3z^2$

i. $x^2 + xy + xz - z^2$

- A 456. Determinare il carattere di definizione della forma quadratica $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita a lato mediante una matrice *non simmetrica*.

$$Q(x, y, z) = (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$