Applicazioni lineari semplici e diagonalizzazione

01. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata ad A tramite la base canonica.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   a. Determinare una base per $\ker(f)$ e una per $\mathrm{Im}(f)$.
   b. Scrivere tutti gli autovalori e tutti gli autovettori di f, dire perché f è semplice e determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori.
   c. Scrivere una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.

02. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in sé definita dalla matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

   a. Determinare due autovettori v e w linearmente indipendenti per f.
   b. Calcolare $f^{100}(v)$ e $f^{100}(w)$.
   c. Scrivere $(1, 0)$ come combinazione lineare di v e w e quindi calcolare $f^{100}(1, 0)$.

03. Date le applicazioni lineari rispettivamente di $\mathbb{R}^2$ o di $\mathbb{R}^3$ o di $\mathbb{R}^4$ in sé definite dalle matrici che seguono, dire se esiste una base di autovettori e nel caso determinarla.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

04. Data la matrice A dell'esercizio precedente.

   a. Usando i dati acquisiti, scrivere una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.
   b. Mediante P calcolare A^{100}.

05. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definita dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, determinare una base di autovettori per f e scrivere una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$

06. a. Scrivere una qualunque trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i cui autovalori siano 1 e 3 e l'autospazio relativo a $\lambda = 3$ sia $V_3 = L\{(1, 0, 2), (0, 1, -1)\}$.
   b. Dire perché, indipendentemente da come è stata definita l'applicazione, f è necessariamente semplice.
   c. Scrivere la matrice associata a f (tramite le basi canoniche).

07. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata mediante la base canonica $\mathcal{K}$ alla matrice simmetrica: $A_{\varphi}^{\mathcal{K},\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   a. Determinare una base per $\ker \varphi$.
   b. Calcolare $\varphi(1, -1, 0)$ e dedurne che $(1, -1, 0)$ è autovettore.
   c. Determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori per φ. Osservare che, grazie ai dati acquisiti nelle due precedenti domande, per trovarla non è necessario calcolare il polinomio caratteristico.