Diagonalizzazione delle matrici

MATRICI DI PASSAGGIO

F 01. Scrivere la matrice di passaggio tra le due seguenti basi di $\mathbb{C}^3$.
$\mathcal{B} : (1,0,1),(2,0,3),(0,1,1)$; $\mathcal{B}_1 : (i,0,0),(0,1,0),(0,0,-1)$.

C 02. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalla base. $\mathcal{B} : (1,0,2),(0,2,-1)$. Verificare che anche $\mathcal{D} : (1,2,1),(1,4,0)\}$ è base per V e scrivere la matrice di passaggio tra le due basi.

DIAGONALIZZAZIONE, APPLICAZIONI LINEARI SEMPLICI

F 11. È data l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita come segue:

$$f(x,y,z) = (3x+2y-3z \quad , \quad 2y \quad , \quad x+2y-z)$$

a. Determinare una base per $\ker(f)$ e una per $\mathrm{Im}\,(f)$
b. Dire se f è semplice e perché.
c. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per f.
d. Scrivere una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.

F 12. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata mediante la base canonica $\mathcal{K}$ alla matrice simmetrica: $A_{\varphi}^{\mathcal{K},\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a. Determinare una base per $\ker \varphi$.
b. Calcolare $\varphi(1,-1,0)$ e dedurne che $(1,-1,0)$ è autovettore.
c. Determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori per φ. Osservare che, grazie ai dati acquisiti nelle due precedenti domande, per trovarla non è necessario calcolare il polinomio caratteristico.

F 13. Provare che sono diagonalizzabili le seguenti matrici a coefficienti reali e diagonalizzarle (determinare cioè P matrice invertibile e Δ matrice diagonale tali che $P^{-1}AP = \Delta$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

F 14. Provare che sono diagonalizzabili le seguenti matrici a coefficienti reali e diagonalizzarle (determinare cioè P matrice invertibile e Δ matrice diagonale tali che $P^{-1}AP = \Delta$).
A matrice $n \times n$ tutta costituita da 1 ($a_{ij} = 1\,,\ \forall\, i,j$)
B matrice $n \times n$ tutta costituita da 1 ($a_{ij} = 1\,,\ \forall\, i,j$), tranne la diagonale che è nulla, ($a_{ij} = 1\,,\ \forall\, i \neq j\ ,\ a_{ii} = 0\,,\ \forall\, i$), cioè $B = A - I$.

C 15. Dimostrare che le seguenti matrici a coefficienti complessi sono diagonalizzabili e diagonalizzarle.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1+i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

C 16. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice B del 13. mediante la base $\mathcal{B} : (1,1,0),(1,-1,0),(0,1,1)$. Determinare una base di autovettori per φ.

F 17. Data l'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita a lato, scrivere la matrice associata tramite la base $\mathcal{B}$: $(1,2,0),(1,1,1),(0,1,1)$ e dire perché φ non è semplice.

$$\begin{aligned} \varphi(1,2,0) &= (1,1,1) \\ \varphi(1,1,1) &= (0,0,0) \\ \varphi(0,1,1) &= (0,1,0) \end{aligned}$$

F 18. È data l'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita mediante le quattro condizioni a lato.

$$\begin{aligned} \varphi(1,0,0,1) &= (1,1,1,1) \\ \varphi(0,1,1,0) &= (0,2,2,0) \\ \varphi(0,0,2,0) &= (0,0,1,0) \\ \varphi(0,0,1,1) &= (0,1,1,0) \end{aligned}$$

a. Scrivere la matrice M associata a φ rispetto alla base $\mathcal{B}$: $(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$

b. Scrivere la matrice K associata a φ rispetto alla base canonica $\mathcal{K}$.

c. Dire se φ è semplice e scrivere tutti gli autovettori di φ.

d. Scrivere una matrice invertibile P tale che $P^{-1}KP = M$.

A 19. Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$ e sia $\varphi : V \to V$ l'applicazione lineare definita come $\varphi(x, y, z) = (2x + 2y\ ,\ -z\ ,\ 2x + 2y - z)$. Verificare che φ è trasformazione lineare di V in sé, scrivere una matrice associata a φ e dimostrare che φ è semplice. Determinare quindi una base di V tutta costituita da autovettori per φ.

C 20. Sono date le due matrici reali A e B dipendenti da due parametri $a, b \in \mathbb{R}$. Per ogni coppia di $a, b \in \mathbb{R}$ dire se esse sono diagonalizzabili.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & b \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

C 21. Data l'applicazione $\varphi : M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ definita come: $\varphi(A) = E_{12}A + E_{12}(-1)A$.

a. Verificare che φ è lineare.

b. Scrivere la matrice associata a φ tramite la base $\mathcal{B}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. Dire se φ è semplice e determinarne tutti gli autovettori.

C 22. a. Dimostrare che la matrice $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ è sempre diagonalizzabile per ogni $\theta \in \mathbb{R}$. $\quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

b. Sia $f : V_2 \to V_2$ associata ad A mediante una base ortonormale $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ di V_2. Determinare tutti gli autovettori di f.

A c. Dare un'interpretazione geometrica degli autovettori di f in funzione di θ.

A 23. Sia $\varphi : M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ la trasformazione lineare definita da $\varphi(A) = A \cdot B - B \cdot A$, dove B è la matrice a lato. Provare che φ è semplice e determinarne una base di autovettori. $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

A 24. Sia $\varphi : M_{33}(\mathbb{R}) \to M_{33}(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da $\varphi(A) = A \cdot C$ (C la matrice sotto).

a. Provare che φ è lineare e scrivere una base per $\ker \varphi$.

b. Provare che gli autovalori di φ sono gli stessi di C, ma con molteplicità triplicata e determinarne gli autovettori.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

F 25. a. Definire un'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

- $\operatorname{Im} \varphi = L\{(1, 1, 1), (1, 0, 2)\}$
- $\ker \varphi = L\{(1, 0, 2)\}$
- 2 sia autovalore e $(1, 1, 1)$ sia un'autovettore relativo.

b. Scrivere la matrice associata a φ rispetto alla base $\mathcal{B}$: $(1, 0, 2), (1, 1, 1), (0, 0, 1)$.

c. Dire se φ è semplice e *perché*.

d. Scrivere, se possibile, tre autovettori linearmente indipendenti per φ.

e. Scrivere, se possibile, tre autovettori distinti per φ.

F 26. Definire una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ soddisfacente simultaneamente le tre condizioni a lato e scrivere la matrice associata a f tramite la base $\mathcal{B}$: $(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 2)$. Dire poi se f è semplice.

$$\begin{cases} f(1, 1, 1) = (0, 0, 1) \\ \operatorname{Im}(f) = L\{(0, 1, 1), (0, 1, 2)\} \\ \text{2 e 3 siano autovalori} \end{cases}$$

F 27. Scrivere un'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i cui autovalori siano 1 e 3 e tale che il sottospazio $V = L\{(1, 0, 2), (0, 1, -1)\}$ sia autospazio. È φ necessariamente semplice?

C 28. Scrivere un'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che abbia come polinomio caratteristico $P_\varphi(x) = (x - 1)(x - 3)$ e tale che $\varphi(1, 3) = (2, 0)$. È φ necessariamente semplice? È φ unica ?

A 29. Scrivere un'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ tale che $P_\varphi(x) = (x^2 - 1)(x - 2)^2$ e $\varphi(V) = V$ dove $V = L\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$, ma V non sia autospazio.

F 30. Date le quattro matrici 3×3, A,B,C,D, dire quali tra esse sono tra loro simili (e perché !) riempiendo la tabella a lato.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$$
$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}2&2&-1\\0&2&0\\0&2&1\end{pmatrix}$$

	A	B	C	D
A	sì			
B		sì		
C			sì	
D				sì

T 31. Dimostrare che la matrice 4×4 B a lato è diagonalizzabile come matrice a elementi complessi. (Suggerimento: Che molteplicità hanno le radici di $P_B(x)$?)

$$B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

C 32. Costruire una trasformazione lineare $\varphi:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ tale che $P_\varphi(x)=(x^2-1)(x-2)$ e inoltre $\varphi(1,1,0)=(0,0,1)$ e $\varphi^2(1,1,0)=(0,1,2)$.

T 33. Provare che se $P(x)$ è un polinomio di grado $n>0$ in $\mathbb{K}[x]$ allora esiste una matrice $A\in M_{nn}(\mathbb{K})$ il cui polinomio caratteristico è $P(x)$. (Suggerimento: Calcolare il polinomio caratteristico della matrice A a lato).

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots 0&a_1\\1&0&0&\cdots 0&a_2\\0&1&0&\cdots 0&a_3\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots 1&a_n\end{pmatrix}$$

C 34. a. Calcolare, usandone la diagonalizzazione, A^{100} dove A è la matrice del 13.
b. Calcolare, usandone la diagonalizzazione, A^{100} dove A è la matrice del 15.

T 35. Può esistere un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^4$ in sé senza autovalori? e una di $\mathbb{R}^3$?

C 36. Provare che l'applicazione $\varphi:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ definita come: $\varphi(P(x))=P'(x)(x-1)$ è lineare e che è semplice ; determinarne una base di autovettori.

C 37. Sia $\varphi: V\longrightarrow V$ un'applicazione lineare di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V in sé e sia λ un suo autovalore. Dimostrare che:

a. λ^2 è un autovalore per l'applicazione lineare $\varphi^2: V\to V$.

b. Se φ è invertibile, allora λ^{-1} è un autovalore per $\varphi^{-1}: V\to V$.

c. $\lambda+1$ è un autovalore per l'applicazione lineare $(\varphi+1): V\to V$.

A 38. Sia $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita come $\varphi(x,y,z)=(x+y\ ,\ -y\ ,\ 3x-z)$. Definire $\psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ applicazione lineare tale che $\psi\circ\varphi$ sia semplice, $P_{(\psi\circ\varphi)}(x)=(x-1)^2(x+2)$ e $(1,1,1)$ sia autovettore.