

Avvertenza sull'uso dei simboli $\pm$ e $\mp$: Faremo largo uso di questi simboli, ma avvertiamo che il loro uso è comodo, ma piuttosto delicato. Il loro significato varia a seconda del contesto.

- Espressioni del tipo “Le rette sono $y = \pm 2x$ ” e “per $k = \pm 1$ ” significano rispettivamente “Le rette sono $y = 2x$ e $y = -2x$ ” e “Per $k = 1$ o $k = -1$ ”.
- Espressioni del tipo “tranne i punti $(\pm 1, 0)$ ” e “per $k \neq \pm 1$ ” significano rispettivamente “tranne i punti $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ ” e “Per $k \neq 1$ e $k \neq -1$ ”.
- Quando compaiono diversi simboli $\pm$ in uno stesso ambito si intende (salvo diverso avviso) che siano correlati, cioè che quando uno assume il valore $+$, lo assumano anche gli altri.
- Esempio: “I punti $(\pm 2, \pm \sqrt{5})$ ” significa “I punti $(2, \sqrt{5})$ e $(-2, -\sqrt{5})$ ”.
- Il simbolo $\mp$ si usa sempre solo in correlazione con dei $\pm$ o con altri $\mp$ e si intende che assuma il valore $-$ quando i $\pm$ assumono il valore $+$ e viceversa.
- Esempio: “Le rette $y = (\pm 2 \mp \sqrt{3})$ ” significa “Le rette $y = (2 - \sqrt{3})$ e $y = (-2 + \sqrt{3})$ ”.
- Esempio: “Per $t = \pm 3$ si ottengono i punti $(\pm 2, \mp \sqrt{3})$ ” significa “Per $t = 3$ si ottiene il punto $(2, -\sqrt{3})$ e per $t = -3$ si ottiene il punto $(-2, \sqrt{3})$ ”.
- Bisogna soprattutto prestare attenzione a manipolare equazioni o espressioni contenenti diversi simboli $\pm$ o $\mp$.
- Esempio: $-(1 \pm \sqrt{2}) \pm 3x$ diventa $-1 \mp \sqrt{2} \pm 3x$ e l'equazione $(\sqrt{2} \pm \sqrt{3})y + (\sqrt{5} \mp \sqrt{2}) = 0$ diventa $y = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{2}}{\sqrt{2} \pm \sqrt{3}}$

Geometria lineare nel piano

501. a. Vettori direzionali sono $(B - A) = (3, -2)$ e tutti i suoi multipli.

Una rappresentazione parametrica è per esempio $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$. Un'altra è $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

b. Per esempio $\begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

c. Un suo punto è $(4, 0)$, un altro è $(1, -1)$. Un vettore direzionale è per esempio $(3, 1)$ (ortogonale al vettore normale della retta che è $\vec{n} = (1, -3)$).

Una rappresentazione parametrica è $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = t \end{cases}$. Un'altra è $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$

502. Ponendo $x = 0$ si trova $t = -1/2$, quindi la sua intersezione con

$x = 0$ è $(0, -5/2)$. Analogamente la sua intersezione con $y = 0$ è $(5, 0)$. Basta quindi scrivere la retta passante per $(0, -5/2)$ e con vettore direzionale $(5, 0) - (0, -5/2) = (5, 5/2)$

Per $t = 1/2$ si ha ora il punto della divisione di $\overline{AB}$ in due parti cioè $M(5/2, -5/4)$.

Per $t = 1/3$ e $t = 2/3$ si hanno i punti della divisione di $\overline{AB}$ in tre parti cioè $M_1(5/3, -5/3)$ e $M_2(10/3, -5/6)$.

503. Le rette r_1 e r_2 coincidono perché hanno gli stessi vettori direzionali e il punto $(1, -1)$ di r_1 sta su r_2 (per $t = -1$).

Le rette s_1 e s_2 non coincidono, pur avendo gli stessi vettori direzionali, perché il punto $(-2, 2)$ di s_1 non sta su s_2 .

504. Basta scrivere le rette nella forma $y = mx + n$, cosa possibile per tutte tranne per la c., che ha quindi coefficiente angolare infinito. Quindi

a. $y = 2x - 4$	$m = 2$	b. $y = 0 \cdot x - 4$	$m = 0$	c. $x = 10$	$m = \infty$
d. $y = \frac{1}{3}x$	$m = \frac{1}{3}$	e. $y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5} - 7$	$m = \frac{1}{5}$	f. $y = \frac{1}{3}x - 1$	$m = \frac{1}{3}$

505. Il sistema lineare 3×2 delle equazioni delle tre rette è associato alla matrice $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -7 \end{array} \right)$ e, riducendolo con l'algoritmo di Gauss si vede che ha l'unica soluzione $(-1, 1)$, quindi le tre rette appartengono a un fascio e il centro è $(-1, 1)$.
506. Il sistema lineare 3×2 delle equazioni delle tre rette è associato alla matrice. La matrice 3×3 ha determinante $2 + 2k - 4k^2$ ed è quindi zero per $k = -1/2$ e $k = 1$.
 Per $k \neq -1/2, 1$ il sistema non ha soluzioni (dato che la caratteristica della matrice completa è 3), quindi le rette non si intersecano in un punto e non sono tutte parallele, perché le due colonne dei coefficienti sono proporzionali solo per $k = 1$, quindi non costituiscono un fascio.
 Per $k = -1/2$ il sistema ha una soluzione $(-1/3, 4/3)$, quindi le rette costituiscono un fascio proprio con questo centro.
 Per $k = 1$ sono tutte parallele con vettore normale $\vec{n} = (2, -1)$ e costituiscono quindi un fascio improprio di rette parallele.
507. a. Il vettore normale è $(1, 3k)$, quindi un vettore direzionale è $(3k, -1)$. Occorre che $(3k, -1)$ e $(2, 1)$ siano proporzionali, cioè che $\frac{3k}{2} = \frac{-1}{1}$, quindi che si abbia $k = -2/3$.
- b. Evidentemente per $k = 0$ si ha una retta parallela all'asse y , mentre per nessun k si ha una retta parallela all'asse x .
 La famiglia è un fascio perché si scrive $(x+2) + k(3y-5)$, ma incompleto, dato che dipende da un parametro anziché da due proporzionali e infatti manca la retta parallela all'asse x .
- c. Visto che la famiglia è un fascio (benché incompleto), basta intersecarne due rette distinte, per esempio $x+2=0$ (per $k=0$) e $x+3y-3=0$ (per $k=1$) e si trova subito $C(-2, 5/3)$.
- d. Le rette intersecano gli assi nei punti $\left(0, \frac{5k-2}{3k}\right)$ e $(5k-2, 0)$. Il triangolo è rettangolo e i due cateti misurano rispettivamente $\left|\frac{5k-2}{3k}\right|$ e $|5k-2|$ per cui l'area del triangolo è $\left|\frac{5k-2}{3k}\right| \cdot \frac{|5k-2|}{2}$. Ponendola uguale a 7 si ricava $25k^2 - 10k + 4 = |42k|$. Le due equazioni di secondo grado sono:
 $25k^2 - 20k + 4 = 42k$ per $k > 0$ che ha le soluzioni $k = \frac{31 \pm \sqrt{861}}{25}$ (entrambe accettabili perché entrambe positive).
 $25k^2 - 20k + 4 = -42k$ per $k < 0$ che ha le soluzioni $k = \frac{-11 \pm \sqrt{21}}{25}$ (entrambe accettabili perché entrambe negative).
508. Parametizziamo la retta: $\{x = t - 2 ; y = t\}$. I punti di r sono quindi $(t - 2, t)$
 Il triangolo sarà POA sarà rettangolo in P se i vettori $(P - O)$ e $(P - A)$ sono ortogonali:
 $(P - O) = (t - 2, t) \quad (P - A) = (t - 12, t)$
 $(P - O) \cdot (P - A) = (t - 2, t) \cdot (t - 12, t) = (t - 2)(t - 12) + t^2 = 0$
 Si ha l'equazione $2t^2 - 14t + 24 = 0$ che ha le due soluzioni $t_1 = 4$ e $t_2 = 3$.
 I punti cercati si ottengono per questi due valori di t e sono $P_1(2, 4) \quad P_2(1, 3)$
509. La retta passa per $M(1/2, 1)$ (punto medio del segmento AB) e ha come vettore normale il vettore $(B - A) = (1, -6)$ e quindi è $1(x - 1/2) - 6(y - 1) = 0$ o anche, semplificando: $2x - 12y + 11 = 0$.
510. a. La retta passante per $P = (1, 1)$ e ortogonale a $r : x - 2y = 1$ è $n : 2x + y = 3$. Intersecando le rette r e n si trova il punto $M = (7/5, 1/5)$.
 Il punto simmetrico è perciò $P_1 = 2M - P = (9/5, -3/5)$.
- b. Osserviamo che $(1, 1)$ sta sulla retta $s : x + y = 2$, quindi la retta simmetrica passa per il punto $P_1(9/5, -3/5)$ trovato sopra. Inoltre passa per il punto intersezione delle due rette r e s che è $I(5/3, 1/3)$. La retta è quindi $s_1 : 21x + 3y = 36$.
511. L'equazione è $(x - y)(x - 3y)(x - 1) = 0$, che è soddisfatta se e solo se $x = y$ oppure $x - 3y = 0$ oppure $x - 1 = 0$.

512. Le rette sono quelle del fascio $ax + b(y - 1) = 0$ il cui vettore normale forma angolo di $\pi/6$ con il vettore normale di $y = 2x$ che è $(2, -1)$. Si deve quindi avere:

$\frac{|(a, b) \cdot (2, -1)|}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ da cui $2 |2a - b| = \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{a^2 + b^2}$ ed elevando a quadrato (è tutto positivo): $a^2 - 16ab - 11b^2 = 0$ o anche $(a/b)^2 - 16(a/b) - 11 = 0$ (posso dividere per b perché evidentemente non c'è alcuna soluzione accettabile con $b = 0$), da cui $a/b = 8 \pm 5\sqrt{3}$, per esempio $a = 8 \pm 5\sqrt{3}$ e $b = 1$ (tutte le altre soluzioni danno le stesse due rette con equazioni proporzionali). Le rette sono pertanto: $(8 \pm 5\sqrt{3})x + y = 1$.

513. Le bisettrici sono notoriamente $\frac{2x - y}{\sqrt{5}} = \pm \frac{x + y - 1}{\sqrt{2}}$. Per stabilire quale delle bisettrici sia situata nell'angolo minore conviene però procedere in altro modo.

Un vettore direzionale per la prima retta è $\vec{v}(1, 2)$, uno per la seconda è $\vec{w}(-1, 1)$. Il loro prodotto scalare è positivo, quindi formano un angolo acuto. Per avere il vettore bisettore nell'angolo acuto li normalizziamo. Dato che ora hanno lo stesso modulo, la loro somma è proprio il vettore bisettore.

$$\frac{(1, 2)}{\sqrt{5}} + \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{10}}, \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{10}} \right).$$

Quindi come vettore direzionale per la retta bisettrice nell'angolo minore possiamo prendere $(\sqrt{2} - \sqrt{5}, 2\sqrt{2} + \sqrt{5})$. Inoltre la retta passa per il punto intersezione delle due rette che è $(1/3, 2/3)$.

Per avere l'altra bisettrice cambiamo verso a uno dei vettori direzionali delle due rette in modo che formino un angolo ottuso: usando $(1, 2)$ e $(1, -1)$ il prodotto scalare è negativo, quindi l'angolo è ottuso. Ripetendo la procedura otteniamo la retta bisettrice nell'angolo maggiore, che ha vettore direzionale $(\sqrt{2} + \sqrt{5}, 2\sqrt{2} - \sqrt{5})$ e passa sempre per $(1/3, 2/3)$.

Le due rette sono $\begin{cases} x = 1/3 + (\sqrt{2} \mp \sqrt{5})t \\ y = 2/3 + (2\sqrt{2} \pm \sqrt{5})t \end{cases}$ Con la scelta “ $- +$ ” si ottiene la bisettrice dell'angolo minore, con la scelta “ $+ -$ ” si ottiene la bisettrice dell'angolo maggiore.

514. Parametizziamo la retta $4x - 3y + 2$: $\{x = 3t + 1; y = 4t + 2\}$. Il simmetrico di $(3t + 1, 4t + 2)$ rispetto alla retta $x - 2y = 2$ è (x_0, y_0) tale che:

- $\left(\frac{3t + 1 + x_0}{2}, \frac{4t + 2 + y_0}{2} \right)$ è su $x - 2y = 2$ cioè $\frac{3t + 1 + x_0}{2} - 2 \frac{4t + 2 + y_0}{2} = 2$.
- $(3t + 1 + x_0, 4t + 2 + y_0)$ è ortogonale a $x - 2y = 2$ cioè $(3t + 1 + x_0, 4t + 2 + y_0) \cdot (2, 1) = 0$.

Dalle due relazioni si deduce $\{x_0 = 5t + 3, y_0 = -2\}$. Avendo tutti punti la stessa ordinata, la distanza minima da $(0, 0)$ si ottiene per $t = -3/5$. Il punto cercato è: $P(-4/5, -2/5)$.

515. Si trova subito che $P = (4, -1)$. Cerchiamo tra i punti della retta $s: \{x = 2 - t; y = 3 + 2t\}$ quello che dista 5 da $P(4, -1)$:

$\text{dist}((2 - t, 3 + 2t), (4, -1)) = 5$ ha come soluzioni $t = -2 \pm \sqrt{5}$ e si trovano i punti di s : $(4 \mp \sqrt{5}, -1 \pm 2\sqrt{5})$. Dobbiamo ora trovare i punti di r le cui proiezioni su s sono appunto questi due punti. Scriviamo quindi le rette ortogonali a s e passanti per questi due punti:

$$\begin{cases} x = 4 \mp \sqrt{5} + 2t \\ y = -1 \pm 2\sqrt{5} + t \end{cases} \quad \text{Intersecandole con } r \text{ si ottiene } t = \mp 3\sqrt{5}/4, \text{ da cui i punti cercati}$$

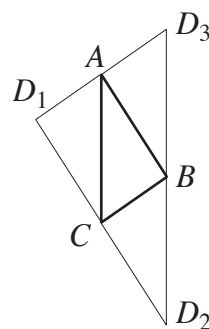
$$P_1 \begin{cases} x = 4 \mp \sqrt{5} + 2(\mp 3\sqrt{5}/4) \\ y = -1 \pm 2\sqrt{5} + (\mp 3\sqrt{5}/4) \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} x = 4 \mp 5\sqrt{5}/2 \\ y = -1 \pm 5\sqrt{5}/4 \end{cases}$$

516. Ci sono tre modi:

Se il parallelogramma è $ABCD_1$, possiamo trovare D_1 sommando i due vettori $(A - B)$ e $(C - B)$. Si ottiene $(D_1 - B) = (4, -4)$, da cui $D_1 = (5, -2)$.

Se il parallelogramma è $CABD_2$, possiamo trovare D_2 sommando i due vettori $(B - A)$ e $(C - A)$. Si ottiene $(D_2 - A) = (7, 2)$, da cui $D_2 = (7, 2)$.

Se il parallelogramma è $ACBD_3$, possiamo trovare D_3 sommando i due vettori $(A - C)$ e $(B - C)$. Si ottiene $(D_3 - C) = (-11, 2)$, da cui $D_3 = (-5, 2)$.



517. Le tre mediane appartengono, come è noto, a un fascio il cui centro è il baricentro. Una delle mediane è la retta passante per $A(a_1, a_2)$ e per il punto medio del lato opposto che è $M((b_1 + c_1)/2, (b_2 + c_2)/2)$.

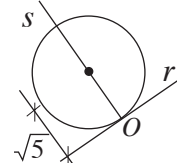
Scriviamo la retta parametricamente in modo da ottenere A per $t = 0$ e M per $t = 1$. Allora, per un'altra nota proprietà del baricentro, esso è situato a $2/3$ della mediana, per cui lo si ottiene per $t = 2/3$. Eseguiti i conti, il baricentro è $\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$.

Circonferenze nel piano

521. La retta passante per $(0, 0)$ e ortogonale a quella data è $s: \{x = 2t; y = -3t\}$.

I centri delle circonferenze devono appartenere alla retta s e sono quindi i punti del tipo $(2t, -3t)$ che hanno distanza $\sqrt{5}$ da $(0, 0)$. Si scrive $\sqrt{(2t - 0)^2 + (-3t - 0)^2} = \sqrt{5}$, da cui $\sqrt{13t^2} = \sqrt{5}$ e quindi $t = \pm\sqrt{5/13}$.

I centri sono perciò $(\pm 2\sqrt{5/13}, \mp 3\sqrt{5/13})$ e le circonferenze sono: $(x \mp \sqrt{20/13})^2 + (y \pm \sqrt{45/13})^2 = 5$.



522. I centri sono i punti dell'asse x cioè del tipo $(t, 0)$ che hanno distanza 1 da $2x - y = 0$. Risolviamo $\frac{|2(t) - (0)|}{\sqrt{5}} = 1$: Si trova $t = \pm\sqrt{5}/2$. Le circonferenze sono quindi: $(x \pm \sqrt{5}/2)^2 + y^2 = 1$.

523. I centri delle circonferenze cercate appartengono all'asse del segmento $\overline{AB}$. L'asse è la retta passante per $M = (A + B)/2 = (0, 1)$ e ortogonale a $(B - A) = (4, -2)$.

Un vettore ortogonale a $(B - A)$ è $(1, 2)$, quindi l'asse è $\{x = t; y = 2t + 1\}$.

I centri sono punti dell'asse che hanno uguale distanza da r e da $B(2, 0)$, cioè tali che $\frac{|(t) + (2t + 1) + 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(t - 2)^2 + (2t + 1 - 0)^2}$. Si ricava $t = 9 \pm 4\sqrt{5}$.

Sostituendo nella retta si hanno i centri, sostituendo in una delle due distanze si ha il raggio. In conclusione le circonferenze sono:

$$(x - 9 \mp 4\sqrt{5})^2 + (y - 19 \mp 8\sqrt{5})^2 = 90(9 \pm 4\sqrt{5})$$

524. Completiamo i quadrati per determinare centro e raggio della circonferenza:

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 8y + 16) = 1 + 16 \quad (x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 17$$

La circonferenza ha quindi centro $(-1, -4)$ e raggio $\sqrt{17}$.

Le rette passanti per $(1, 2)$ sono $a(x - 1) + b(y - 2) = 0$ (a, b non entrambi nulli). Calcoliamo la loro distanza dal centro e imponiamo che sia $\sqrt{17}$.

$$\text{Si ha: } \frac{|a(-1 - 1) + b(-4 - 2)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{17} \text{ ovvero } 13a^2 - 24ab - 19b^2 = 0.$$

Possiamo supporre $b \neq 0$ perché evidentemente non c'è alcuna soluzione con $b = 0$ (a parte $a = b = 0$ che non dà una retta). Dividendo per b^2 , l'equazione omogenea di secondo grado

$$\text{diventa } 13\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 24\left(\frac{a}{b}\right) - 19 = 0 \text{ e ha le soluzioni } \frac{a}{b} = \frac{12 \pm \sqrt{391}}{13}.$$

Per esempio $a = 12 \pm \sqrt{391}$ e $b = 13$. Le rette sono quindi: $(12 \pm \sqrt{391})(x - 1) + 13(y - 2) = 0$. Tutte le altre soluzioni dell'equazione omogenea di secondo grado sono proporzionali e quindi forniscono le stesse rette.

525. Il centro della circonferenza è sulla retta passante per $B(1, 0)$ e ortogonale a t . Questa retta ha vettore direzionale $(1, 1)$, quindi una sua rappresentazione parametrica è: $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \end{cases}$

Il centro è perciò tra i punti del tipo $C(t + 1, t)$ quello avente la stessa distanza da A e da B :

$$\text{dist}(A, C) = \sqrt{(t + 1 - 0)^2 + (t - 2)^2} = \sqrt{t^2 + 2t + 1 + t^2 - 4t + 4} = \sqrt{2t^2 - 2t + 5}$$

$$\text{dist}(B, C) = \sqrt{(t + 1 - 1)^2 + (t - 0)^2} = \sqrt{t^2 + t^2} = \sqrt{2t^2}$$

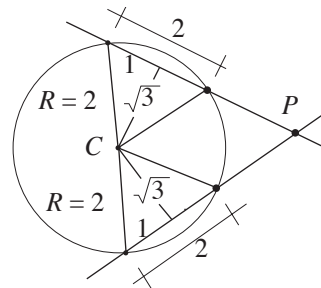
$$\text{Perciò: } \sqrt{2t^2 - 2t + 5} = \sqrt{2t^2} \text{ da cui } 2t^2 - 2t + 5 = 2t^2 \text{ e } t = 5/2$$

Il centro è quindi $C\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Il raggio è la distanza tra A e C cioè $\sqrt{2t^2} = \sqrt{25/2} \simeq 3.53$.

L'equazione della circonferenza è $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

526. La circonferenza ha centro $C = (2, 0)$ e raggio $R = 2$.

Le rette sono quelle del fascio di centro $P(4, -1)$ e cioè del tipo $a(x - 4) + b(y + 1) = 0$ la cui distanza dal centro è $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. La distanza dal centro è $\frac{|a(2 - 4) + b(0 + 1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, quindi si ha: $\frac{|-2a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{3}$, da cui $a^2 - 4ab - 2b^2 = 0$. Risolvendo rispetto ad a si trova $a = (2 \pm \sqrt{6})b$. Per esempio $a = 2 \pm \sqrt{6}$ e $b = 1$.
Le rette sono: $(2 \pm \sqrt{6})(x - 4) + (y + 1) = 0$.



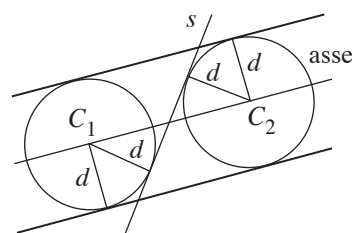
527. Intersechiamo le due rette parallele con una retta qualunque, per esempio l'asse x e otteniamo $(1, 0)$ e $(3, 0)$. L'asse della striscia è la retta passante per il punto medio di questi due punti e parallela alle due date, cioè la retta $y = 2x + 2$ o anche $\{x = t; y = 2t + 2\}$.

I centri sono i punti $(t, 2t + 2)$ la cui distanza d da $y = 2x + 1$ è uguale a quella da s . Cioè: $\frac{|2x - y + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|3x - y|}{\sqrt{10}}$

ovvero: $\frac{|2t - (2t + 2) + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|3t - (2t + 2)|}{\sqrt{10}}$. Si trova

$t = 2 \pm \sqrt{2}$, da cui i centri. Il raggio è per entrambe la metà della distanza di un punto della prima retta (per esempio $(1, 0)$) dalla seconda. Si trova $R = 1/\sqrt{5}$.

Le circonferenze sono: $(x - 2 \pm \sqrt{2})^2 + (y - 6 \pm 2\sqrt{2})^2 = 1/5$.



528. I centri delle circonferenze cercate appartengono alle due bisettrici delle rette. Le bisettrici sono: $\frac{x + y + 1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{2x - y - 4}{\sqrt{5}}$. Dato che i centri appartengono all'asse y , essi sono le intersezioni tra l'asse y e le bisettrici, cioè $(0, 1 \mp \sqrt{10})$.

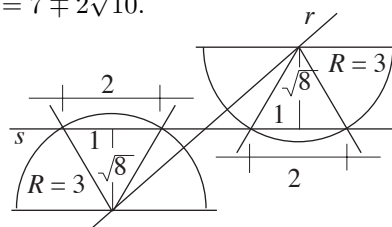
I raggi sono le distanze dei centri da una delle rette per esempio da $x + y + 1 = 0$ e sono rispettivamente $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ (per il "+") e $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ (per il "-")

Le circonferenze sono quindi: $x^2 + (y - 1 \pm \sqrt{10})^2 = 7 \mp 2\sqrt{10}$.

529. La circonferenza ha come centro un punto della retta $r: \{x = t; y = 3t + 2\}$ che abbia distanza $\sqrt{8} = \sqrt{3^2 - 1}$ dalla retta s . Ce ne sono quindi due e sono $(1, 5)$ e $(-1, -1)$.

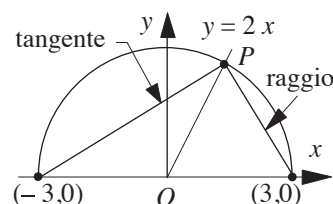
Le circonferenze sono:

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 9 \quad (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$$



530. Una delle intersezioni, dovendo essere punto della retta $y = 2x$ è del tipo $P(t, 2t)$. Il raggio della circonferenza che passa per P e ha centro $C(3, 0)$ ha come vettore direzionale $(P - C)$ cioè $(t - 3, 2t)$. Questo è anche un vettore normale della retta tangente che ha perciò equazione $(t - 3)(x - t) + 2t(y - 2t) = 0$. Imponendo che la tangente passi per il punto $(-3, 0)$ si ottiene $5t^2 - 9 = 0$, cioè $t = \pm 3/\sqrt{5}$. Il punto P è quindi uno di questi due: $(\pm 3/\sqrt{5}, \pm 6/\sqrt{5})$. Il raggio cercato è il modulo del vettore $(P - C)$, cioè $R = \sqrt{(\pm 3/\sqrt{5} - 3)^2 + (\pm 6/\sqrt{5})^2}$.

Altro modo (più geometrico) Il punto P cercato è il vertice di un triangolo rettangolo di base $(-3, 0)$, $(3, 0)$ i cui cateti sono il raggio e la tangente. Cioè P è all'intersezione tra la retta $y = 2x$ e la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 3 che è $x^2 + y^2 = 9$. Si trovano i due punti $(\pm 3/\sqrt{5}, \pm 6/\sqrt{5})$ e si conclude come sopra.



531. I vettori direzionali delle due rette sono $\vec{v}_1(1, 2)$ e $\vec{v}_2(-1, 3)$. Dato che il loro prodotto scalare è positivo, normalizzandoli e sommandoli si ottiene un vettore direzionale per la bisettrice

dell'angolo acuto.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}}, \frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{10}}\right) \text{ o anche } (\sqrt{2}-1, 2\sqrt{2}+3).$$

Le due rette si intersecano in $(0,0)$, quindi anche la bisettrice passa per l'origine e una sua rappresentazione parametrica è perciò: $\begin{cases} x = (\sqrt{2}-1)t \\ y = (2\sqrt{2}+3)t \end{cases}$. I centri delle circonferenze cercate sono i punti della bisettrice che distano 2 da una di esse, per esempio dalla prima, cioè tali che:

$$\left| \frac{(\sqrt{2}-1)t - 2(2\sqrt{2}+3)t}{\sqrt{5}} \right| = 2 \quad \left| t = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} \right. \text{ da cui } \left. \left(\pm \frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{5}, \pm \frac{6\sqrt{5}+4\sqrt{10}}{5} \right) \right.$$

Le circonferenze cercate hanno centro nei punti trovati e naturalmente raggio 2.

532. a. La distanza dei due centri è $\sqrt{5}$ e va confrontata con i due raggi 1 e R . Notiamo che il centro della seconda circonferenza è esterno alla prima perché la distanza tra $(2,3)$ e $(1,1)$ è maggiore di 1. Quindi le due circonferenze sono esterne se $R+1 < \sqrt{5}$, etc.

In dettaglio:

Se $R < \sqrt{5}-1$ sono esterne.

Se $R = \sqrt{5}-1$ sono tangenti esternamente.

Se $\sqrt{5}-1 < R < \sqrt{5}+1$ sono incidenti.

Se $R = \sqrt{5}+1$ sono tangenti internamente.

Se $R > \sqrt{5}+1$ la prima è interna alla seconda.

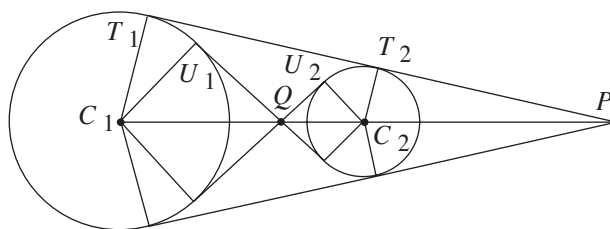
- b. Scriviamo il sistema (non lineare!) delle equazioni delle circonferenze. Sostituendo la seconda equazione con la differenza si ottiene il sistema equivalente $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ 2x + 4y = 12 - R^2 \end{cases}$

La retta $2x + 4y = 12 - R^2$ è quella passante quindi per gli eventuali punti comuni alle due circonferenze. Nei casi di tangenza ($R = \sqrt{5} \mp 1$) le rette tangenti sono quindi $2x + 4y = 6 \pm \sqrt{5}$.

- c. Si procede esattamente come nel caso precedente e si scrive la retta ottenuta per $R = 3$ e cioè $2x + 4y = 3$

533. Le circonferenze sono esterne e hanno centri rispettivamente $C_1(1,2)$ e $C_2(1,-2)$ e raggi $R_1 = \sqrt{2}$ e $R_2 = 1$. Le due tangenti esterne si incontrano in un punto P tale che i triangoli PC_1T_1 e PC_2T_2 siano simili, cioè tali che i triangoli PC_1T_1 e PC_2T_2 siano simili,

cioè tali che $\frac{PC_1}{PC_2} = \frac{R_1}{R_2}$. Analogamente le due esterne si incontrano in un punto Q tale che i triangoli QC_1U_1 e QC_2U_2 siano simili, cioè tali che $\frac{QC_1}{QC_2} = \frac{R_1}{R_2}$ (stessa uguaglianza).



Dato che la retta congiungente i due centri è $\{x = 1; y = t\}$, P e Q saranno del tipo $(1,t)$ e dall'uguaglianza si trova $t = -6 \pm 4\sqrt{2}$. (Col segno “-” si ha Q). Ora basta condurre da P e da Q le due rette tangenti a una qualunque delle due circonferenze e si hanno le quattro tangenti comuni.

Due delle tangenti passano per $P(1, -6-4\sqrt{2})$ e hanno coefficiente angolare $m = \pm\sqrt{47+32\sqrt{2}}$; le altre due passano per $Q(1, -6+4\sqrt{2})$ e hanno coefficiente angolare $m = \pm\sqrt{47-32\sqrt{2}}$.

Geometria lineare nello spazio

541. Un vettore normale al piano α è $\vec{n} = (1, -3, 1)$.

- Il piano parallelo è $1(x-0) - 3(y-1) + 1(z-2) = 0$, cioè $x - 3y + z + 1 = 0$.
- Un piano per P ortogonale ad α è $a(x-0) + b(y-1) + c(z-2) = 0$ con $(a,b,c) \cdot (1,-3,1) = 0$, cioè $a - 3b + c = 0$. Quindi ce ne sono infiniti; per esempio per $(a,b,c) = (1,0,-1)$ otteniamo $x - z + 2 = 0$, per $(a,b,c) = (1,1,2)$ otteniamo $x + y + 2z - 5 = 0$.
- La retta ha come vettore direzionale $\vec{n}$ e passa per P , quindi una sua rappresentazione parametrica è $\{x = 0 + t; y = 1 - 3t; z = 2 + t\}$

- d. Occorre intersecare la retta r ottenuta in c. con α .
Sostituendo r in α : $(t) - 3(1 - 3t) + (2 + t) = 0$ da cui $11t = 1$. Quindi per $t = 1/11$ si ha il punto proiezione: $P_0 = (1/11, 8/11, 23/11)$.
542. Un vettore direzionale per r è $\vec{v} = (2, 1, -1)$.
- a. È evidentemente $\{x = 2t \ ; \ y = 1 + t \ ; \ z = 2 - t\}$
- b. Un vettore $\vec{w} = (l, m, n)$ è ortogonale a $\vec{v}$ se $(l, m, n) \cdot (2, 1, -1) = 0$ cioè se $2l + m - n = 0$.
Quindi ci sono infinite rette passanti per P e ortogonali a r . Per esempio:
Scegliendo $\vec{w} = (0, 1, 1)$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$ Scegliendo $\vec{w} = (1, -1, 1)$ $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$
si ha la retta $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$ si ha la retta $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$
- c. Il piano passante per P e ortogonale a r è $2(x-0) + 1(y-1) - 1(z-2) = 0$, cioè $2x + y - z + 1 = 0$.
- d. Intersechiamo il piano trovato sopra con r sostituendo i punti di r nell'equazione del piano:
 $2(1 + 2t) + (1 + t) - (-t) + 1 = 0$, da cui $6t + 4 = 0$. Per $t = -2/3$ otteniamo il punto $P_1(-1/3, 1/3, 2/3)$, proiezione ortogonale di P su r .
- e. La distanza di P da r è uguale alla distanza tra P e P_1 :
 $d = \sqrt{(0 + 1/3)^2 + (1 - 1/3)^2 + (2 - 2/3)^2} = \sqrt{7/3}$.
- f. La retta cercata è la retta passante per P e P_1 :
 $\begin{cases} x = 0 + (-1/3 - 0)t \\ y = 1 + (1/3 - 1)t \\ z = 2 + (2/3 - 2)t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 - t/3 \\ y = 1 - 2t/3 \\ z = 2 - 4t/3 \end{cases}$ Sostituendo per comodità t con $-3t$ $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$
543. a. Per rappresentare parametricamente r occorre porre $y = t$, perché altrimenti non è possibile ricavare y per $k = 0$. La rappresentazione è immediata.
- b. Intersechiamo r con α sostituendo i punti di r nell'equazione del piano: $(k - t) + 2(t) + (1 - k^2t) = 0$, da cui l'equazione di primo grado in t : $(1 - k^2)t = -k - 1$.
 $r : \begin{cases} x = k - t \\ y = t \\ z = 1 - k^2t \end{cases}$
Se $k \neq \pm 1$, l'equazione ha una soluzione, per cui la retta e il piano sono incidenti.
Per vedere se in qualche caso possono anche essere ortogonali vediamo se sono proporzionali il vettore direzionale di r che è $(-1, 1, -k^2)$ e il vettore normale del piano $(1, 2, 1)$. Il rapporto delle prime coordinate è -1 , mentre quello delle seconde è $1/2$, quindi per nessun valore di k sono ortogonali.
Se $k = 1$, l'equazione non ha soluzioni, per cui la retta è parallela al piano.
Se $k = -1$, l'equazione è soddisfatta da ogni t , per cui la retta giace sul piano.
544. I vettori $(B - A) = (2, 0, 1)$ e $(B - C) = (2, 2, -1)$ non sono paralleli per cui A, B, C non sono allineati. Il piano dei tre punti ha come vettore normale $(B - A) \wedge (B - C) = (2, 0, 1) \wedge (2, 2, -1) = (-2, 4, 4)$ o anche $(1, -2, -2)$.
Quindi il piano è $1(x - 0) - 2(y - 1) - 2(z - 0) = 0$ cioè $x - 2y - 2z + 2 = 0$.
545. Modo 1: La retta è $r : \{x - y = 0 \ ; \ y + z - 2 = 0\}$, quindi il fascio di piani di asse r è $a(x - y) + b(y + z - 2) = 0$. Tra questi piani, l'unico passante per $(1, 0, 3)$ si ottiene per a, b tali che $a(1 - 0) + b(0 + 3 - 2) = 0$, cioè $a + b = 0$, per esempio $a = 1$ e $b = -1$, da cui il piano $x - 2y - z + 2 = 0$.
- Modo 2: Un vettore parallelo a r è $\vec{v} = (1, 1, -1)$. Un punto di r è per esempio $P_0(0, 0, 2)$. Il piano cercato ha come vettore normale $\vec{n} = \vec{v} \wedge (P - P_0)$ cioè $(1, 1, -1) \wedge ((1, 0, 3) - (0, 0, 2)) = (1, 1, -1) \wedge (1, 0, 1) = (1, -2, -1)$, quindi il piano è $1(x - 1) - 2(y - 0) - 1(z - 3) = 0$ ovvero $x - 2y - z + 2 = 0$.
546. Scriviamo le due rette in forma parametrica con due parametri diversi:
 $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 + u \\ y = k - 2u \\ z = 3 - u \end{cases}$ Intersechiamole: $\begin{cases} t = -1 + u \\ 1 - t = k - 2u \\ t = 3 - u \end{cases} \quad \begin{cases} t - u = -1 \\ -t + 2u = k - 1 \\ t + u = 3 \end{cases}$
Si vede subito che il sistema lineare 3×2 in t, u ha soluzione solo se $k = 4$. La soluzione è $t = 1 \ ; \ u = 2$. I due valori forniscono su ciascuna delle rette lo stesso punto comune $(1, 0, 1)$. I vettori direzionali delle due rette sono $(1, -1, 1)$ e $(1, -2, -1)$. Un vettore normale per il piano

è perciò $(1, -1, 1) \wedge (1, -2, -1) = (3, 2, -1)$.

Quindi il piano è $3(x - 1) + 2(y - 0) - 1(z - 1) = 0$, cioè $3x + 2y - z = 2$.

547. Si tratta innanzitutto di determinare il numero di soluzioni del sistema lineare delle equazioni dei tre piani che è associato alla matrice seguente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k^2 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & k+1 & 0 \\ 0 & 2-2k^2 & 4k+3 & k^2+3 \end{array} \right) \quad \text{Riduciamo con } R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1:$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k^2 & 1 & -4 \\ 0 & 2-2k^2 & k-1 & 8 \\ 0 & 2-2k^2 & 4k+3 & k^2+3 \end{array} \right) \quad \text{e poi con } R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k^2 & 1 & -4 \\ 0 & 2-2k^2 & k-1 & 8 \\ 0 & 0 & 3k+4 & k^2-5 \end{array} \right)$$

Guardando la diagonale del sistema, si vede che è ridotto se $k \neq 1, -1, -4/3$, pertanto per questi valori il sistema ha un'unica soluzione e i tre piani si intersecano in un solo punto.

Esaminiamo i tre casi particolari:

- Se $k = 1$, allora la seconda equazione del sistema ridotto diventa $0 = 8$, pertanto il sistema non ha soluzione. Per capire come sono disposti i tre piani esaminiamoli:

$$\alpha: x + y + z = -4 \quad \beta: 2x + 2y + 2z = 0 \quad \gamma: 7z = 4$$

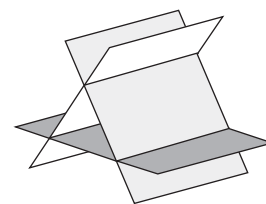
Si constata subito che α e β sono paralleli, mentre γ incide α e β e per questo motivo i piani non hanno punti in comune.

- Se $k = -1$, dalla matrice si vede subito che ha ∞^1 soluzioni e perciò i piani costituiscono un fascio: esaminiamo allora i tre piani:

$$\alpha: x + y + z = -4 \quad \beta: 2x + 2y = 0 \quad \gamma: -z = 4$$

Le tre equazioni sono una rappresentazione cartesiana dell'asse del fascio. Ne bastano due per avere una rappresentazione cartesiana della retta: $\{2x + 2y = 0; -z = 4\}$. Una rappresentazione parametrica è $\{x = -t; y = t; z = -4\}$; da essa si ricava subito un vettore direzionale: $\vec{v} = (-1, 1, 0)$

- Se $k = -4/3$, l'ultima equazione è $0 = -29/9$, pertanto il sistema non ha soluzioni. Esaminando i tre piani α, β, γ , si vede subito che essi non sono a due a due paralleli, ciò significa che sono disposti come in figura e per tale motivo non hanno punti a comune.



548. Parametizziamo $r: \{x = 2t; y = t; z = 0\}$. Un vettore parallelo a r è quindi $(2, 1, 0)$.

- a. Il piano ortogonale a r passante per P è $2x + y - 2 = 0$. Intersecandolo con r si trova il punto proiezione su r che è $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$.

Per quanto riguarda la proiezione su α , osserviamo che il punto P giace sul piano α e pertanto la sua proiezione su α è P stesso.

- b. Modo 1: Scriviamo il fascio di piani di asse $r: a(x - 2y) + bz = 0$. Questi piani hanno vettore normale $(a, -2a, b)$. Un vettore normale ad α è $(1, -3, -1)$, quindi il piano del fascio che proietta r su α è quello ortogonale ad α , cioè tale che $(a, -2a, b) \cdot (1, -3, -1) = 0$.

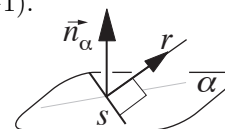
Si trova $7a - b = 0$. Per esempio $a = 1$ e $b = 7$, da $\begin{cases} x - 2y + 7z = 0 \\ x - 3y = z \end{cases}$ cui il piano $x - 2y + 7z = 0$. La retta è quindi:

Modo 2: L'intersezione tra r e α è $(0, 0, 0)$. Un altro punto di r è per esempio $P(2, 1, 0)$. La retta che proietta ortogonalmente P su α è $\{x = 2 + t; y = 1 - 3t; z = 0 - t\}$. L'intersezione tra questa retta e α è $(23/11, 8/11, -1/11)$. La retta proiezione cercata è quella passante per questo punto e per $(0, 0, 0)$, cioè $\{x = 23t; y = 8t; z = -t\}$ (è ovviamente la stessa trovata sopra).

549. La retta s è ortogonale sia a $\vec{n}_\alpha = (1, 2, 1)$ che a $\vec{v}_r = (1, 1, 1)$. Quindi come suo vettore direzionale possiamo prendere il vettore $\vec{v} = (1, 2, 1) \wedge (1, 1, 1) = (1, 0, -1)$.

Inoltre la retta passa per il punto di intersezione di α e r che è

$$P = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right). \quad \text{La retta è quindi } \begin{cases} x = 1/4 + t \\ y = 1/4 \\ z = 1/4 - t \end{cases}$$

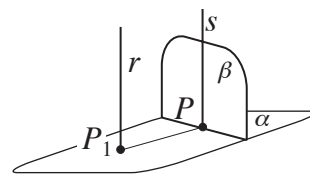


550. a. Un vettore direzionale di r è $\vec{v} = (2, 1, 3)$. La retta s è quindi $\{x = 2t; y = 1 + t; z = 3t\}$. Intersechiamo r con il piano α passante per $P(0, 1, 0)$ e ortogonale a r che è $2x + y + 3z - 1 = 0$.

Si trova il punto $P_1\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{1}{7}\right)$. La distanza tra le due rette

parallele è uguale a quella tra i punti P e P_1 che è $d = \sqrt{6/7}$.

- b. Il piano β è quello che passa per P ed è ortogonale al vettore $(P_1 - P) = (4/7, -5/7, -1/7)$ e cioè $4x - 5y - z + 5 = 0$.



551. a. È il modulo del vettore $(C - A) \wedge (B - A) = (-2, 0, 1) \wedge (-1, -1, 3) = (1, 5, 2)$ e cioè $\sqrt{30}$.

- b. Come si vede dalla figura si deve avere

$$(S - A) = (B - A) + (C - A)$$

$$\text{Quindi } (S - A) = (-1, -1, 3) + (-2, 0, 1) = (-3, -1, 4)$$

$$\text{da cui } S = (2, 1, 0) + (-3, -1, 4) = (-1, 0, 4)$$



- c. Il volume del parallelepipedo è come noto il valore assoluto del prodotto misto dei tre vettori. Poniamo $D = (x_0, 0, 0)$. Si deve avere $|(B - A) \wedge (C - A) \cdot (D - A)| = 3$. Il vettore $(B - A)$ è già stato calcolato ed è $(-1, -5, -2)$, quindi: $|(-1 - 5, -2) \cdot (x_0 - 2, -1, 0)| = 3$ da cui $|-x_0 + 2 + 5| = 3$ $x_0 = \pm 3 + 7$. Quindi i punti cercati sono $D_1 = (4, 0, 0)$ e $D_2 = (10, 0, 0)$.

552. a. Parametizziamo le due rette con due parametri diversi.

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3u - 2 \\ y = u \\ z = -u \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{I vettori direzionali sono rispettiva-} \\ \text{mente } \vec{v}_r = (1, 1, 0) \quad \vec{v}_s = (3, 1, -1) \\ \text{Vediamo se hanno punti comuni:} \end{array} \quad \begin{cases} t = 3u - 2 \\ t = u \\ 2 = -u \end{cases}$$

Evidentemente il sistema 3×2 in t, u non ha soluzioni, e i vettori direzionali non sono proporzionali, quindi le rette sono sghembe.

- b. Le rette incidenti entrambi sono quelle passanti per $(t, t, 2)$ e $(3u - 2, u, -u)$:

$$\begin{cases} x = t + (3u - 2 - t)v \\ y = t + (u - t)v \\ z = 2 + (-u - 2)v \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Il parametro } t \text{ scorre su } r, \text{ il parametro } u \text{ su } s, \text{ il} \\ \text{parametro } v \text{ sulle rette. Un loro vettore direzionale} \\ \text{è } (3u - 2 - t, u - t, -u - 2). \end{array}$$

- c. Imponiamo l'ortogonalità sia a r che a s . Dato che $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$ e $\vec{v}_s = (3, 1, -1)$, allora:

$$\begin{cases} (3u - 2 - t, u - t, -u - 2) \cdot (1, 1, 0) = 0 \\ (3u - 2 - t, u - t, -u - 2) \cdot (3, 1, -1) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Si ricava il sistema} \\ \text{lineare in } t \text{ e } u: \end{array} \quad \begin{cases} 4u - 2t = 2 \\ 11u - 4t = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{che ha} \\ \text{la soluzione } t = -1; u = 0. \end{array}$$

- d. Imponiamo il parallelismo (non l'uguaglianza!) con il vettore $(1, 1, 1)$. Basta imporre che $(3u - 2 - t, u - t, -u - 2) \wedge (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, cioè $(2u - t + 2, -4u + t, 2u - 2) = (0, 0, 0)$. Si ricava il sistema lineare 3×2 in t e u a lato che ha una soluzione: $\begin{cases} 2u - t = -2 \\ -4u + t = 0 \\ 2u = 2 \end{cases}$ $t = 4; u = 1$. Per questi valori di t e u si ricava la retta cercata: $\{x = 1 + t; y = 1 + t; z = -1 + t\}$

- e. I valori di t e u ricavati in c. forniscono i punti di r e s giacenti sulla retta ortogonale a entrambe e che sono anche i punti di minima distanza. I punti sono $P_r(-1, -1, 2)$ $P_s(-2, 0, 0)$.

La distanza tra r e s è la distanza tra P_r e P_s : $d = \sqrt{(-2 + 1)^2 + (0 + 1)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{6}$.

553. Le rette giacenti sul piano hanno vettore direzionale ortogonale al vettore normale del piano α che è $\vec{n} = (1, -2, 1)$.

- a. Il vettore di r_1 sarà il prodotto vettore tra $\vec{n}$ e il vettore $(1, 0, 0)$ (parallelo all'asse x) e cioè $(0, 1, 2)$. La retta è quindi:

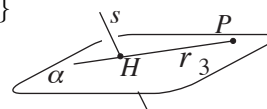
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

- b. Il vettore di r_2 sarà il prodotto vettore tra i vettori normali ai due piani $(1, -2, 1)$ e $(3, 0, -1)$ e cioè $(2, 4, 6)$ o anche $(1, 2, 3)$. La retta è quindi:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

- c. Determiniamo innanzitutto l'intersezione di s con il piano risolvendo il sistema lineare: $\{x - 3y = 0; z - 2 = 0; x - 2y + z = 0\}$

Si trova il punto $H(-6, -2, 2)$. La retta r_3 è perciò quella passante per $P(1, 0, -1)$ e per $H(-6, -2, 2)$ e cioè:

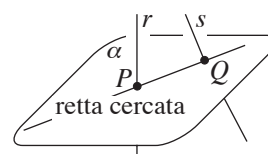


$$\begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = 0 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

554. Parametizziamo r : $\{x = t ; y = t ; z = 3t + 2\}$. Quindi $\vec{v}_r = (1, 1, 3)$. Le rette cercate giacciono tutte sul piano α passante per $P(0, 0, 2)$ e ortogonale a r che è $x + y + 3z - 6 = 0$.

- a. La retta cercata, giacendo sul piano α , intersecherà s nello stesso punto in cui s incontra α . Il punto di intersezione tra s e α è il punto $Q(6/5, 6/5, 6/5)$.

La retta cercata è quindi quella passante per $P(0, 0, 2)$ e per $Q(6/5, 6/5, 6/5)$, cioè $\{x = 6t/5 ; y = 6t/5 ; z = 2 - 4t/5\}$.



- b. La retta cercata è ortogonale sia a r che s , quindi come vettore direzionale per essa possiamo prendere $\vec{v}_s \wedge \vec{v}_r = (1, 1, 1) \wedge (1, 1, 3) = (2, -2, 0)$ o anche $(1, -1, 0)$. Inoltre passa per $(0, 0, 2)$. La retta è $\{x = t ; y = -t ; z = 2\}$.

- c. Chiamiamo p le rette cercate. Per calcolare la distanza tra p e s , si calcola la distanza di un punto di p (l'unico che conosciamo è $(0, 0, 2)$) dal piano passante per s e parallelo a p . Il piano è del tipo $a(x - y) + b(y - z) = 0$. Senza avere ancora il piano, dato che non conosciamo p , possiamo però imporre uguale a 1 la sua distanza da $(0, 0, 2)$. Si ha:

$$\frac{|a(x - y) + b(y - z)|}{\sqrt{a^2 + (-a + b)^2 + b^2}} = 1 \text{ per } (x, y, z) = (0, 0, 2), \text{ cioè } a^2 - ab - b^2 = 0, \text{ da cui } a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} b.$$

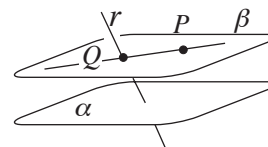
Per esempio $a = 1 \pm \sqrt{5}$ e $b = 2$. I piani trovati sono paralleli a p . Le rette p giacciono su piani paralleli a questi e precisamente sui piani passanti per $(0, 0, 2)$ e paralleli ai piani trovati.

Inoltre giacciono sempre sul piano $x + y + 3z - 6 = 0$ $\begin{cases} x + y + 3z = 6 \\ (1 \pm \sqrt{5})(x - y) + 2(y - z + 2) = 0 \end{cases}$

Le rette sono quindi:

555. I punti la cui proiezione sulla retta s è $(0, 0, 0)$ giacciono tutti sul piano passante per $(0, 0, 0)$ e ortogonale a s che è $2x + y - 2z = 0$. Intersecando questo piano con la retta r si trova il punto è $(2, 2, 3)$ che è il punto cercato.

556. Le rette giacciono tutte sul piano β passante per P e parallelo al piano dato che è il piano $x + 3y - z - 8 = 0$. La retta r e il piano β si intersecano nel punto $Q(9, 3, 10)$. La retta cercata deve intersecare r proprio nel punto Q . La retta è quindi quella passante per P e Q , cioè: $\{x = 1 + 8t ; y = 2 + t ; z = -1 + 11t\}$.



557. a. Parametizziamo r e s con due parametri diversi:

$$r \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad s \begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = 2t - 2 \\ z = t \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Quindi:} \\ \vec{v}_r = (1, 0, 1) \\ \vec{v}_s = (2, 2, 1) \end{matrix} \quad \text{Il sistema in } t \text{ e } u \quad \begin{cases} t + 1 = 2u - 5 \\ 1 = 2u - 2 \\ t = u \end{cases}$$

non ha soluzioni. Inoltre le rette non sono parallele perché $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ non sono proporzionali, quindi le rette sono sghembe.

- b. I piani contenenti r sono $a(x - z - 1) + b(y - 1) = 0$ e hanno vettore normale $(a, b, -a)$. Tra essi quello parallelo a s è tale che $(a, b, -a) \cdot (2, 2, 1) = 0$, cioè $a + 2b = 0$, per esempio $a = 2 ; b = -1$, da cui il piano $2x - y - 2z - 1 = 0$. Un punto di s è $(-5, -2, 0)$, quindi la distanza d tra r e s è quella tra il punto e il piano, cioè $d = 3$.

- c. Le rette incidenti entrambi hanno come vettore direzionale $(t + 1, 1, t) - (2u - 5, 2u - 2, u) = (t - 2u + 6, -2u + 3, t - u)$

Occorre che questo vettore sia ortogonale a $\vec{v}_r$ e a $\vec{v}_s$, cioè:

$$\begin{cases} (t - 2u + 6, -2u + 3, t - u) \cdot (1, 0, 1) = 0 \\ (t - 2u + 6, -2u + 3, t - u) \cdot (2, 2, 1) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Si ricava il sistema} \\ \text{lineare in } t \text{ e } u: \end{matrix} \quad \begin{cases} 2t - 3u = -6 \\ 3t - 9u = -18 \end{cases}$$

che ha la soluzione $t = 0 ; u = 2$. Per questi valori di t e u si ricavano i punti di r e s che definiscono la retta ortogonale a entrambe: $P_r(1, 1, 0)$, $P_s(-1, 2, 2)$ e la retta che è $\{x = 1 - 2t ; y = 1 + t ; z = 2t\}$.

- d. Il piano è parallelo al piano trovato in b. e passante per il punto $M = (0, 3/2, 1)$ che è il punto medio tra P_r e P_s . Il piano è $2x - y - 2z + 7/2 = 0$.

- e. I piani contenenti la retta r sono $a(x - z - 1) + b(y - 1) = 0$ e hanno vettore normale $(a, b, -a)$. Perché la proiezione di P_1 su α abbia distanza 1 da P_s occorre che sia uguale a 1 la distanza di P_s da α . Si ha: $\frac{|a(-1 - 2 - 1) + b(2 - 1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + a^2}} = 1$. Si ricava $14a^2 - 8ab = 0$ o

anche $a(7a - 4b) = 0$. Quindi un piano si ottiene per esempio per $a = 0$ e $b = 1$ ed è $y = 1$. L'altro per esempio per $a = 4$ e $b = 7$ ed è $4x + 7y - 4z - 11 = 0$.

- f. I punti di r sono $(t + 1, 1, t)$. Per misurarne la distanza da s scriviamo i piani passanti per ciascuno di questi punti e ortogonali ad s : $2(x - t - 1) + 2(y - 1) + (z - t) = 0$.

Intersechiamo questi piani con s facendo attenzione che il parametro che scorre su s abbia un nome diverso da t . La retta s è $\{x = 2u - 5; y = 2u - 2; z = u\}$. Sostituendo si ha: $9u - 3t - 18 = 0$. Dato che stiamo ora cercando un punto di s , l'equazione va risolta rispetto a u : $u = (t + 6)/3$. Sostituendo in s si ottiene il punto dipendente da t che è la proiezione ortogonale di $(t + 1, 1, t)$ su s . Il punto è $((2t - 3)/3, (2t + 6)/3, (t + 6)/3)$. Poniamo uguale

$$a \text{ la distanza tra i due punti: } \sqrt{\left(\frac{2t-3}{3} - (t+1)\right)^2 + \left(\frac{2t+6}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{t+6}{3} - t\right)^2} = 6$$

da cui $t^2 = 27$ e $t = \pm 3\sqrt{3}$. Pertanto i punti di r cercati sono $(\pm 3\sqrt{3} + 1, 1, \pm 3\sqrt{3})$.

558. Il punto intersezione tra r e α è $P(2, 0, 4)$. Un vettore direzionale per r è $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$, un vettore normale ad α è $\vec{n}_\alpha = (1, 1, 0)$.

- a. La retta che forma angolo massimo è quella ortogonale a r . Passa per P e ha vettore direzionale ortogonale sia a $\vec{v}_r$ che a $\vec{n}_\alpha$, per esempio $(1, -1, 0)$. È quindi: $\{x = 2 + t; y = -t; z = 4\}$.

- b. La retta che forma angolo minimo è la proiezione ortogonale di r sul piano. Scriviamo tutti i piani contenenti r : $a(x - y - 2) + b(z - 2x) = 0$. Hanno vettore normale $(a - 2b, -a, b)$. Quello tra essi che proietta r si ottiene imponendo che $(a - 2b, -a, b) \cdot (1, 1, 0) = 0$, per esempio per $a = 1$ $b = 0$. Il piano è quindi $x - y = 2$. Quindi la retta è $\{x - y = 2; x + y = 2\}$ che si può scrivere anche $\{x = 2; y = 0\}$.

- c. Sia (a, b, c) il vettore direzionale delle rette cercate. Perché giacciono sul piano occorre che $(a, b, c) \cdot (1, 1, 0) = 0$, cioè che $b = -a$, quindi il vettore è $(a, -a, c)$. Perché si abbia $\theta = \pi/3$, occorre che $\frac{|(a, -a, c) \cdot (1, 1, 2)|}{\sqrt{a^2 + a^2 + c^2} \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$, cioè $6a^2 - 5c^2 = 0$. Per esempio $a = \pm\sqrt{5}$ e $c = \sqrt{6}$.

Le rette passano per $P(2, 0, 4)$ e sono quindi: $\{x = 2 \pm \sqrt{5}t; y = \mp \sqrt{5}t; z = 4 + \sqrt{6}t\}$.

559. Osserviamo innanzitutto che r ha vettore direzionale $\vec{v}(2, 1, 2)$ e che α ha vettore normale $\vec{n}(3, -2, 1)$.

- a. Proiettiamo P su r . Per questo occorre il piano passante per P e ortogonale a r che è $2x + y + 2z = 6$; intersecandolo con r si trova la proiezione di P su r che è il punto $M(16/9, 8/9, 7/9)$; il punto simmetrico è $P' = 2M - P = (23/9, 16/9, -4/9)$.

- b. Proiettiamo P su α . Per questo occorre la retta passante per P e ortogonale ad α che è $\{x = 1 + 3t; y = -2t; z = 2 + t\}$; intersecandola con α si trova la proiezione di P su α che è $N(-1/14, 10/14, 23/14)$; il punto simmetrico è $P'' = 2N - P = (-8/7, 10/7, 9/7)$.

- c. È semplicemente $O' = 2P - O = (2, 0, 4)$.

- d. I punti di r si ottengono scrivendo una rappresentazione parametrica di r e sono $(2t, t, 2t - 1)$ al variare di t . Il punto simmetrico di $(2t, t, 2t - 1)$ rispetto a $P(1, 0, 2)$ è $(2 - 2t, -t, 5 - 2t)$. Questi sono tutti e soli i punti di r' . La retta r' è pertanto: $\{x = 2 - 2t; y = -t; z = 5 - 2t\}$.

- e. L'intersezione di r con α è il punto $I(1/3, 1/6, -2/3)$. Prendiamo un punto qualunque di r per esempio $R(0, 0, -1)$. La proiezione di R su α è il punto $N(3/14, -2/14, -13/14)$. Il simmetrico di R rispetto ad α è quindi $R' = 2N - R = (3/7, -2/7, -6/7)$.

Allora r'' è la retta IR' e cioè $\{x = 1/3 - 4t; y = 1/6 + 19t; z = -2/3 + 8t\}$.

- f. Un punto dell'asse x è $(u, 0, 0)$. La retta r ha vettore direzionale $(2, 1, 2)$.

Il punto simmetrico di $(u, 0, 0)$ rispetto a r è (x, y, z) tale che:

- $\frac{(x, y, z) + (u, 0, 0)}{2} \in r$, cioè $\left\{ \frac{x+u}{2} = 2 \frac{y}{2} = \frac{z}{2} + 1 \right\} \quad \{x - 2y = u; 2y - z = 2\}$
- $\left((x, y, z) - (u, 0, 0) \right) \cdot (2, 1, 2) = 0$, cioè $2(x - u) + y + 2z = 0$.

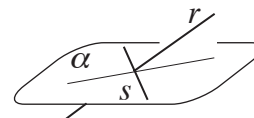
Le tre equazioni trovate formano un sistema lineare 3×3 in x, y, z dipendente da u la cui so-

luzione è $\{x = (8 - u)/9; y = (4 + 4u)/9; z = (8u - 10)/9\}$: questo è il punto simmetrico di $(u, 0, 0)$ e quindi questa è una rappresentazione parametrica della retta simmetrica x' .

g. Dato che α contiene $O(0, 0, 0)$ e il simmetrico di O rispetto a P è $(2, 0, 4)$ (trovato in c.), allora il piano α' è il piano parallelo ad α e passante per $O'(2, 0, 4)$: $3x - 2y + z = 10$.

h. Consideriamo la retta s giacente su α e ortogonale e incidente a r .

La retta s è la retta passante per $I(1/3, 1/6, -2/3)$ e avente vettore direzionale $\vec{v}_r \wedge \vec{n}_\alpha = (5, 4, -7)$. Ogni punto di s , che è un punto di α , ha come simmetrico rispetto a r sempre un punto di s . Quindi s giace anche sul piano simmetrico α'' .



Prendiamo ora un punto qualunque di α che non stia su r , per esempio $O(0, 0, 0)$. Il simmetrico di O rispetto a r si può calcolare come in a. ed è $Q(8/9, 4/9, -10/9)$. Allora α'' è il piano contenente s e Q e cioè: $x - 10y - 5z - 2 = 0$.

i. Il simmetrico di $(1, 0, 0)$ (che è un punto di $z = 0$) rispetto ad α è $Q(-2/7, 6/7, -3/7)$. Il piano β è il piano del fascio generato da α e $z = 0$ che contiene Q . La sua equazione è: $3x - 2y - 6z = 0$.

560. Simmetrici di P_0 sono risp. $(-x_0, -y_0, -z_0)$; $(-x_0, -y_0, z_0)$; $(x_0, y_0, -z_0)$

Simmetriche di r sono risp. $\{-x(y), -y(t), -z(t)\}$; $\{-x(y), -y(t), z(t)\}$; $\{x(y), y(t), -z(t)\}$.

Simmetrici di α sono risp. $ax + by + cz + d = 0$; $-ax - by + cz = d$; $ax + by - cz = d$.

561. La retta ha vettore direzionale $\vec{v}(1, 2, -1)$, quindi i piani cercati hanno vettore normale ortogonale a $\vec{v}$. I vettori ortogonali a $\vec{v}$ sono (l, m, n) tali che $(l, m, n) \cdot (1, 2, -1) = 0$, cioè $(-2m + n, m, n)$. I piani sono pertanto $(-2m + n)(x - 0) + m(y - 2) + n(z - 0) = 0$. Ha senso calcolarne la distanza da r , dato che sono retta e piano sono paralleli. Per far questo basta calcolare la distanza di un punto qualunque di r , per esempio $(0, 0, 0)$ da essi e imporla, come richiesto, uguale a 1.

$$\text{dist} = \frac{|(-2m + n)(0 - 0) + m(0 - 2) + n(0 - 0)|}{\sqrt{(-2m + n)^2 + m^2 + n^2}} = 1$$

Si ricava l'equazione $m^2 - 4mn + 2n^2 = 0$ che, risolta per esempio rispetto a m , ha le due soluzioni $m = (2 \pm \sqrt{2})n$. Ponendo $n = 1$ si ricavano i due piani:

$$(-2(2 \pm \sqrt{2}) + 1)x + (2 \pm \sqrt{2})(y - 2) + z = 0.$$

562. a. Se esiste, la retta cercata è complanare a r . Dato che passa per P , allora deve giacere sul piano α contenente P e r che è $x = 2y - 1$.

Analogamente, se esiste, è complanare a s e deve giacere sul piano β contenente P e s che è $2x - y + 3z - 4 = 0$.

La retta quindi dev'essere $\begin{cases} x = 2y - 1 \\ 2x - y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$. Ma va verificato che sia incidente sia r che s , dato che la complanarità non ne assicura l'incidenza. Dato che, come si calcola, incontra r in $(-3, 1, 3)$ e s in $(2, 1/2, 1/6)$, allora è proprio la retta cercata.

b. Come in a. si determinano il piano $\alpha: x - 2y + 3z - 2 = 0$ contenente r e P e il piano $\beta: 2x - y + 3z - 4 = 0$ contenente s e P , ma la retta $\begin{cases} x - 2y + 3z - 2 = 0 \\ 2x - y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$, come si verifica immediatamente, è parallela a r , non incidente. Pertanto la retta cercata non esiste.

Sfere e circonferenze nello spazio

571. a. Basta completare i quadrati:

$$x^2 + (y^2 + 4y + 4) + \left(z^2 - 3z + \frac{9}{4}\right) = 4 + \frac{9}{4} \quad x^2 + (y + 2)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

Quindi il centro è $C\left(0, -2, \frac{3}{2}\right)$ e il raggio è $R = \frac{5}{2}$.

b. Occorre calcolare la distanza tra il centro C della sfera e il piano α .

$$d = \frac{|x + 2y + z - 2|}{\sqrt{6}} = \frac{|0 + 2(-2) + (3/2) - 2|}{\sqrt{6}} = \frac{|-9/2|}{\sqrt{6}} = \frac{9}{2\sqrt{6}}$$

Confrontiamo ora d con R : $d = \frac{9}{2\sqrt{6}}$ $R = \frac{5}{2}$ Eleviamo a quadrato: $d^2 = \frac{81}{24}$ $R^2 = \frac{25}{4}$

Dato che $d^2 < R^2$, allora $d < R$ quindi l'intersezione è una circonferenza.

La cosa più semplice da scrivere è l'asse che è la retta a passante per C e ortogonale ad α :

Intersecando l'asse con il piano α si trova il centro:

$(t) + 2(-2 + 2t) + (3/2 + t) = 2$ da cui $t = 3/4$, quindi il centro della circonferenza è $C_1(3/4, -1/2, 9/4)$.

$$a: \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3/2 + t \end{cases}$$

Infine il raggio R_1 della circonferenza si trova dalla relazione

$R_1^2 = R^2 - d^2$, quindi:

$$R_1 = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{81}{24}} = \sqrt{\frac{23}{8}}$$

- c. Il piano cercato è del tipo $x + 2y + z + k = 0$ e occorre che il piano abbia distanza R dal centro della sfera, quindi:

$$\frac{|x + 2y + z + k|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{2} \quad \text{Sostituiamo } (x, y, z) \text{ con } (0, -2, 3/2) \quad \frac{|-4 + 3/2 + k|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{2} \quad |k - 5/2| = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

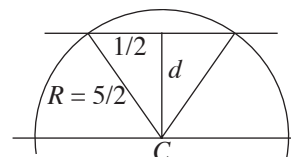
Quindi $k = \frac{5}{2}(1 \pm \sqrt{6})$ e i piani sono $x + 2y + z + \frac{5}{2}(1 \pm \sqrt{6}) = 0$

- d. Come si vede dallo schizzo, occorre che il piano abbia distanza d dal centro della sfera, dove

$$d^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2, \text{ cioè } d = \sqrt{6}.$$

Il piano cercato è del tipo $x + 2y + z + k = 0$ e la sua distanza da C è come nel conto fatto sopra:

$$d = \frac{|-4 + 3/2 + k|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \quad |k - 5/2| = 6 \quad k = 5/2 \pm 6.$$



I piani quindi sono due, un piano (segno $+$) è $x + 2y + z + 17/2 = 0$, l'altro (segno $-$) è $x + 2y + z - 7/2 = 0$

- e. Intersechiamo la sfera con la retta sostituendo le equazioni parametriche della retta nella sua equazione: $t^2 + t^2 + t^2 + 4t - 3t = 0$ da cui $3t^2 + t = 0$ e $t_1 = -1/3$; $t_2 = 0$.

Quindi i due punti sono $P_1 = (-1/3, -1/3, -1/3)$ $P_2 = (0, 0, 0)$.

Il piano tangente alla sfera in P_1 ha come vettore normale

$$(C - P_1) = \left(0, -2, \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{11}{6}\right) \quad \text{Quindi il piano è:}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right)\left(y + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{11}{6}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right) = 0 \text{ o anche } 2x - 10y + 11z + 1 = 0.$$

Il piano tangente alla sfera in P_2 ha come vettore normale

$$(C - P_2) = (0, -2, 3/2) - (0, 0, 0) = (0, -2, 3/2)$$

Quindi il piano è $-2y + (3/2)z = 0$ o anche $4y - 3z = 0$.

Si può notare che, essendo il piano tangente alla sfera in $(0, 0, 0)$, la sua equazione è la parte di primo grado dell'equazione della sfera.

- f. Intersechiamo la sfera con le rette sostituendo le equazioni parametriche nella sua equazione: $(t + 1)^2 + (kt)^2 + 9 + 4(kt) - 3(3) = 0$. Riordinando rispetto a t :

$$(1 + k^2)t^2 + (2 + 4k)t + 1 = 0.$$

Al variare di k , le soluzioni dell'equazione di secondo grado in t forniscono i punti di intersezione della retta con la sfera.

La retta sarà incidente se le soluzioni sono due, tangente se le soluzioni sono una (con molteplicità 2), esterna se non ha soluzioni (o meglio se sono non reali).

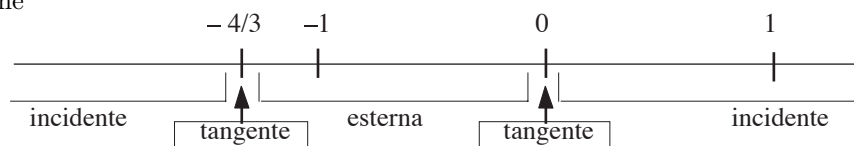
Per sapere in quale situazione ci troviamo esaminiamo il discriminante dell'equazione di secondo grado: $\Delta = (2 + 4k)^2 - 4(1 + k^2) = 12k^2 + 16k$.

Il discriminante è nullo se $k = 0$ o $k = -4/3$.

Il discriminante è positivo se $k < -4/3$ o $k > 0$.

Il discriminante è negativo se $-4/3 < k < 0$.

In conclusione



572. a. Il centro della circonferenza è la proiezione ortogonale di P su r . Per determinarla occorre il piano α perpendicolare a r e passante per P .

Scriviamo r in forma parametrica. Da essa si ricava subito che $(1, 0, 1)$ è un vettore parallelo a r e sarà anche il vettore normale del piano α che è quindi $1(x - 0) + 0(y - 2) + 1(z - 1) = 0$ cioè $x + z = 1$.

Intersechiamo r con α : $t + (t - 3) = 1$ da cui $t = 2$ e si ottiene da r il centro $C(2, 1, -1)$.

Il raggio della circonferenza è la distanza tra P e r :

$$\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, C) = |(0, 2, 1) - (2, 1, -1)| = |(-2, 1, 2)| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

Il piano di giacenza è proprio α .

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 9 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Una rappresentazione cartesiana di γ è perciò:

- b. La retta è ortogonale al vettore $(P - C) = (-2, 1, 2)$. Inoltre deve giacere sul piano α .

Quindi un vettore parallelo a t può essere $(P - C) \wedge \vec{n}_\alpha$

$$\begin{pmatrix} P - C \\ \vec{n}_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (1, 4, -1) \quad \text{Da qui la retta } t \text{ che deve passare per } P(0, 2, 1) \quad t \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 2 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

- c. Il centro delle sfere è un punto dell'asse cioè del tipo $A = (t, 1, t - 3)$.

Il raggio si può calcolare come la distanza tra A e un qualunque punto di γ , per esempio $P = (0, 2, 1)$.

$$|(t, 1, t - 3) - (0, 2, 1)| = |(t, -1, t - 4)| = \sqrt{t^2 + 1 + t^2 - 8t + 16} = \sqrt{2t^2 - 8t + 17}$$

Imponiamo che il raggio sia 9, quindi: $2t^2 - 8t - 64 = 81$ da cui $2t^2 - 8t - 64 = 0$. Si trovano $t_1 = 8$ e $t_2 = -4$.

Per $t_1 = 8$ si ha il centro $(8, 1, 5)$ e la sfera $(x - 8)^2 + (y - 1)^2 + (z - 5)^2 = 81$

Per $t_2 = -4$ si ha il centro $(-4, 1, -7)$ e la sfera $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 + (z + 7)^2 = 81$

- d. Come sopra il raggio è $\sqrt{2t^2 - 8t + 17}$. Perché la sfera sia tangente al piano $x = 5$ occorre che il raggio sia la distanza tra A e il piano $x = 5$.

La distanza tra A e il piano $x = 5$ è $|t - 5|$, da cui le eguaglianze:

$$\sqrt{2t^2 - 8t + 17} = |t - 5| \Rightarrow 2t^2 - 8t + 17 = t^2 - 10t + 25 \Rightarrow t^2 + 2t - 8 = 0$$

L'ultima equazione ha le soluzioni $t = -4, 2$, pertanto le sfere hanno centri rispettivamente $(-4, 1, -7)$ e $(2, 1, -1)$ e raggi $|-4 - 5| = 9$ e $|2 - 5| = 3$. Le sfere sono quindi:

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 + (z + 7)^2 = 81 \quad (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 9$$

La prima sfera è una di quelle già trovate in c.

573. a. Calcoliamo le tre distanze:

$$\text{dist}(C_0, A) = |(A - C_0)| = |(2, -1, -1)| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{dist}(C_0, B) = |(B - C_0)| = |(1, 2, 1)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{dist}(C_0, C) = |(C - C_0)| = |(1, -2, -1)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

La sfera esiste perché le tre distanze sono uguali. La rappresentazione è immediata dato che abbiamo centro e raggio: $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 6$

- b. La circonferenza può essere rappresentata come intersezione tra la sfera e il piano contenente i tre punti. Il piano ha come vettore normale per esempio $(A - B) \wedge (A - C)$.

$$\begin{pmatrix} A - B \\ A - C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3, -2 \\ 1, 1, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = (2, -2, 4) \text{ o anche } \vec{n} = (1, -1, 2).$$

Quindi il piano è $1(x - 2) - 1(y - 0) + 2(z - 0) = 0$ $x - y + 2z - 2 = 0$

La circonferenza è $\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 6 \\ x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$

- c. L'asse è la retta passante per C_0 e ortogonale ad α : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Il centro C_1 si trova intersecando α con il piano:

$$(t) - (1 - t) + 2(1 + 2t) = 2 \quad 6t - 1 = 0 \quad t = 1/6 \Rightarrow C_1 = (1/6, 5/6, 4/3)$$

Il raggio R_1 si ottiene per esempio dalla relazione $R_1^2 = R^2 - \text{dist}^2(C_1, C_0)$

$$\text{Ma } \text{dist}^2(C_1, C_0) = \left| (0, 1, 1) - \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3} \right) \right|^2 = \left| \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3} \right) \right|^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{9} = \frac{1}{6}$$

Quindi $R_1^2 = 6 - 1/6 = 35/6$

- d. La retta tangente è ortogonale al vettore $(A - C_0) = (2, -1, -1)$ e, dato che giace sul piano della circonferenza, è anche ortogonale al vettore normale del piano $\vec{n} = (1, -1, 2)$. Quindi un suo vettore direzionale si può ottenere dal prodotto vettoriale

$$(A - C_0) \wedge \vec{n} \quad \text{con} \quad (A - C_0) = (2, -1, -1) \quad \vec{n} = (1, -1, 2)$$

$$\frac{(A - C_0)}{\vec{n}} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} = (-3, -5, -1) \quad \text{La retta tangente è: } \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -5t \\ z = -t \end{cases}$$

574. a. I centri delle sfere sono punti della retta passante per $(1, 1, 0)$ e ortogonale a $x = y$. La retta è $\{x = 1 + t; y = 1 - t; z = 0\}$ e quindi i centri sono i punti $C(1 + t, 1 - t, 0)$. Il raggio delle sfere è la distanza tra C e $(1, 1, 0)$ e cioè $\sqrt{2} |t|$. Le sfere hanno quindi equazioni: $(x - (1 + t))^2 + (y - (1 - t))^2 + z^2 = 2t^2$.

- b. Basta imporre $2t^2 = 2$. Si ottiene $t = \pm 1$. Le sfere sono:

$$\text{Per } t_1 = 1 \quad (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$\text{Per } t_2 = -1 \quad x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 2.$$

- c. Bisogna che la distanza tra il centro $(1 + t, 1 - t, 0)$ e il piano $x + z = 3$ sia $\sqrt{2} |t|$, quindi si ha: $\frac{|x + z - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|(1 + t) + (0) - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|t - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} |t|$ da cui $t - 2 = 2t$ e $t - 2 = -2t$.

Si ottengono $t_1 = -2$; $t_2 = 2/3$. Le sfere sono quindi:

$$\text{Per } t_1 = -2 \quad (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 8$$

$$\text{Per } t_2 = 2/3 \quad (x - 5/3)^2 + (y - 1/3)^2 + z^2 = 8/9$$

575. Un punto generico della retta è $(t, t, 0)$. La retta è esterna perché sostituendo nell'equazione della sfera si ha $8t^2 - 4t + 1 = 0$ e questa equazione di secondo grado non ha soluzioni.

La sfera è $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2z + 1/4 = 0$ o anche, completando i quadrati:

$$(x^2 - x + 1/4) + y^2 + (z^2 + 2z + 1) = -1/4 + 1/4 + 1, \text{ quindi ha centro } (1/2, 0, -1) \text{ e raggio } 1.$$

I piani del fascio sono $a(x - y) + bz = 0$. Per essere tangenti a S occorre che la loro distanza dal centro della sfera sia pari al raggio.

$$\text{Quindi } \frac{|a(x - y) + bz|}{\sqrt{a^2 + a^2 + b^2}} = 1 \text{ per } (x, y, z) = (1/2, 0, -1), \text{ cioè } \left| \frac{1}{2}a - b \right| = \sqrt{2a^2 + b^2}.$$

Elevando a quadrato i due termini positivi si ricava l'equazione omogenea in a, b di secondo grado $7a^2 + 4ab = 0$ che ha le soluzioni $[a = 0; b \text{ qualunque}]$ $[a = (-4/7)b]$.

Questi due insiemi di soluzioni danno luogo a due piani.

Per $a = 0$ e per esempio $b = 1$ si ha il piano $z = 0$,

Ponendo per esempio $a = 4$ e quindi $b = -7$ si ha il piano $4x - 4y - 7z = 0$.

576. Osserviamo innanzitutto che il piano α della circonferenza è il piano che contiene C e r .

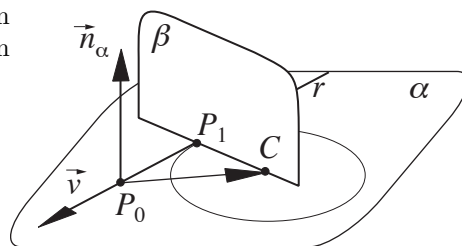
Un vettore direzionale per r è $\vec{v} = (2, 1, -1)$. Un punto di r è per esempio $P_0 = (1, 1, 0)$, quindi un vettore normale al piano α è $\vec{v} \wedge (C - P_0)$ dove

$$(C - P_0) = (0, 1, 2) - (1, 1, 0) = (-1, 0, 2)$$

$$\vec{v} \wedge (C - P_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (2, -3, 1) = \vec{n}_\alpha$$

$$\text{Il piano } \alpha \text{ è } 2(x - 0) - 3(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$

$$\text{o anche } \alpha: 2x - 3y + z + 1 = 0$$



Per trovare il raggio della circonferenza occorre calcolare la distanza di C da r . Per questo occorre il piano β passante per C e ortogonale a r che è $2(x - 0) + 1(y - 1) - 1(z - 2) = 0$, cioè $2x + y - z + 1 = 0$.

Intersechiamo il piano trovato sopra con r : $2(1 + 2t) + (1 + t) - (-t) + 1 = 0$, da cui $6t + 4 = 0$. Per $t = -2/3$ otteniamo il punto $P_1(-1/3, 1/3, 2/3)$, proiezione ortogonale di C su r , che è anche il punto di tangenza.

Il raggio è la distanza di C da r cioè la distanza tra C e P_1 :

$$R = \sqrt{(0 + 1/3)^2 + (1 - 1/3)^2 + (2 - 2/3)^2} = \sqrt{7/3}.$$

$$\text{Ora possiamo scrivere la circonferenza: } \begin{cases} 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 7/3 \end{cases}$$

577. a. Scriviamo r in forma parametrica: $\{x = t + 1 ; y = 1 - 2t ; z = t\}$. Quindi i vettori direzionali sono: $\vec{v}_r(1, -2, 1)$ e $\vec{v}_s(1, 0, -1)$. Le rette sono quindi ortogonali. Per vedere se sono sghembe confrontiamole, dopo aver cambiato nome al parametro di s :

$$\begin{cases} t + 1 = u \\ 1 - 2t = 2 \\ t = 3 - u \end{cases} \quad \begin{cases} t - u = -1 \\ 2t = -1 \\ t + u = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} t - u = -1 \\ 2t = -1 \\ 2t = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Il sistema non ha soluzioni} \\ \text{e le rette non sono parallele,} \\ \text{quindi sono sghembe.} \end{array}$$

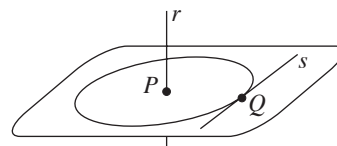
Per calcolare la distanza, scriviamo i punti di minima distanza imponendo che il vettore rappresentato dal segmento orientato di estremi $(t + 1, 1 - 2t, t)$ e $(u, 2, 3 - u)$ sia ortogonale a entrambe. Si deve perciò avere:

$$\begin{cases} (t + 1 - u, 1 - 2t - 2, t - 3 + u) \cdot (1, -2, 1) = 0 \\ (t + 1 - u, 1 - 2t - 2, t - 3 + u) \cdot (1, 0, -1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5t = 0 \\ 4 - 2u = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ u = 2 \end{cases}$$

Quindi per $t = 0$ si ha $P(1, 1, 0)$ su r e per $u = 2$ si ha $Q(2, 2, 1)$ su s . La loro distanza è $\sqrt{3}$ che è anche la distanza tra le due rette.

- b. La circonferenza esiste perché la retta tangente è ortogonale all'asse. Il centro della circonferenza è P , il raggio è la distanza tra le rette cioè $\sqrt{3}$. Il piano della circonferenza è il piano passante per P e ortogonale a r cioè $x - 2y + z + 1 = 0$. Quindi una sua rappresentazione cartesiana è:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$



578. I punti di r sono $(t, t, 1 + t)$. Sono centri della sfera cercata se la loro distanza da α è 2.

Quindi $\frac{|(t) - 3(t)|}{\sqrt{10}} = 2$. Si ricava $t = \pm\sqrt{10}$, quindi i centri sono $(\pm\sqrt{10}, \pm\sqrt{10}, 1 \pm \sqrt{10})$.

Le sfere cercate hanno equazioni: $(x \pm \sqrt{10})^2 + (y \pm \sqrt{10})^2 + (z - 1 \pm \sqrt{10})^2 = 4$

579. a. Basta scrivere i vettori direzionali dei cateti:

$$(B - A) = (2, 1, 0) - (1, 0, 2) = (1, 1, -2) \quad (A - C) = (1, 0, 2) - (0, -1, 1) = (1, 1, 1)$$

Si ha: $(B - A) \cdot (C - A) = (1, 1, -2) \cdot (1, 1, 1) = 1 + 1 - 2 = 0$, quindi il triangolo è rettangolo.

- b. Il punto H è sull'ipotenusa BC . L'ipotenusa ha rappresentazione parametrica:

$$\text{ip} \begin{cases} x = 2 + (0 - 2)t \\ y = 1 + (-1 - 1)t \\ z = 0 + (1 - 0)t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad \text{e ha vettore direzionale } \vec{v}_{ip} = (-2, -2, 1).$$

Il punto H è del tipo $H = (2 - 2t, 1 - 2t, t)$ e si deve avere: $(H - A) \cdot \vec{v}_{ip} = 0$, cioè $(2 - 2t - 1, 1 - 2t - 0, t - 2) \cdot (-2, -2, 1) = 0 \quad -2 + 4t - 2 + 4t + t - 2 = 0$.

Si ricava $t = 2/3$. Quindi $H = (2/3, -1/3, 2/3)$.

La misura dell'altezza è $\text{dist}(A, H) = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{9}} = \sqrt{2}$

- c. I due vettori $(B - A) = (1, 1, -2)$ e $(A - C) = (1, 1, 1)$ sono paralleli al piano α , per cui un vettore normale ad α sarà un qualunque vettore non nullo ortogonale a entrambi, cioè

$$\vec{n} = (a, b, c) \text{ con } (a, b, c) \cdot (1, 1, -2) = 0 \text{ e } (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = 0, \text{ cioè } \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Una soluzione non nulla del sistema omogeneo è per esempio $(1, -1, 0)$, quindi il piano (che passa per esempio per A) è $1(x - 1) - 1(y - 0) + 0(z - 2) = 0$, cioè $\alpha: x - y = 1$

- d. La circonferenza è circoscritta a un triangolo rettangolo, quindi il centro sarà il punto medio dell'ipotenusa, cioè $C_0 = \frac{B + C}{2} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$. Il raggio è la metà della lunghezza dell'ipotenusa, cioè $r = \frac{1}{2} \text{dist}(BC) = \frac{\sqrt{(2 - 0)^2 + (1 + 1)^2 + (0 - 1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$.

La circonferenza si può quindi ottenere come intersezione della sfera di centro C_0 e raggio r con il piano α contenente i tre punti.

Quindi una sua rappresentazione cartesiana è

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1/2)^2 = 9/4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

e. La retta $\overline{AC}$ è $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Il punto A_1 quindi è del tipo $(t, t-1, t+1)$. Per formare

un quadrato, occorre che $\text{dist}(A, A_1) = \text{dist}(A, B) = \sqrt{6}$

Quindi $\text{dist}(A, A_1) = \sqrt{(t-1)^2 + (t-1-0)^2 + (t+1-2)^2} = \sqrt{6}$ da cui $3(t-1)^2 = 6$. L'equazione di secondo grado $(t-1)^2 = 2$ ha le due soluzioni $t = 1 \pm \sqrt{2}$.

La retta $\overline{AC}$ è stata parametrizzata in modo che si ottenga C per $t = 0$ e A per $t = 1$, quindi per ottenere il punto A_1 che è oltre A , occorrerà un valore del parametro maggiore di 1, quindi la soluzione cercata è $t = 1 + \sqrt{2}$. In conclusione: $A_1 = (1 + \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$

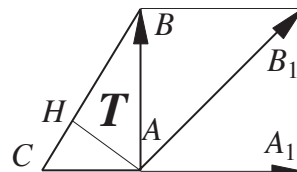
È evidente dalla figura la seguente relazione vettoriale

$$(A_1 - A) + (B - A) = (B_1 - A)$$

$$\text{Esplicitando: } (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) + (1, 1, -2) = (B_1 - A)$$

$$B_1 = A + (1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}) \text{ e infine}$$

$$B_1 = (2 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$$



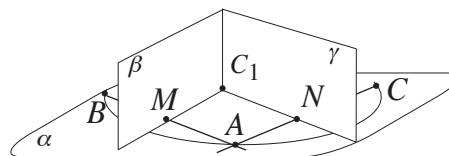
580. Si ha: $(B - A) = (1, 0, -1)$ e $(C - A) = (1, -2, 0)$. I due vettori non sono paralleli per cui A, B, C non sono allineati.

Il piano α contenente la circonferenza è il piano passante per i tre punti che ha come vettore normale $(C - A) \wedge (B - A) = (1, -2, 0) \wedge (1, 0, -1) = (2, 1, 2)$. Il piano è $\alpha: 2x + y + 2z = 3$. Il punto medio di $\overline{AB}$ è $M(1/2, 1, 1/2)$. Il piano β bisettore del segmento $\overline{AB}$ passa per M e ha vettore normale $(B - A) = (1, 0, -1)$ ed è quindi $\beta: x - z = 0$.

Il punto medio di $\overline{AC}$ è $N(1/2, 0, 1)$. Il piano γ bisettore del segmento $\overline{AC}$ passa per N e ha come vettore normale $(C - A) = (1, -2, 0)$ ed è quindi $\gamma: x - 2y = 1/2$.

Il centro C_1 della circonferenza è l'intersezione dei tre piani e si trova risolvendo il sistema 3×3 delle equazioni dei tre piani. Si trova $C_1 = (13/18, 1/9, 13/18)$.

Il raggio è la distanza tra C_1 e uno dei tre punti, per esempio $|C_1 - A| = \sqrt{25/18}$.



Questi dati bastano a scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza $\begin{cases} (x - 13/18)^2 + (y - 1/9)^2 + (z - 13/18)^2 = 25/18 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$

581. Un punto del piano è $(u - v, u, v)$. Imponendo che abbia distanza 1 da ciascuno degli altri due piani si hanno le relazioni: $|u - v| = 1$; $|u + v + 1| = \sqrt{2}$. Questi sono quattro sistemi lineari e hanno quindi quattro soluzioni. Le quattro sfere sono:

$$(x - 1)^2 + (y - 1 \pm \sqrt{2}/2)^2 + (z \pm \sqrt{2}/2)^2 = 1; \quad (x - 1)^2 + (y \pm \sqrt{2}/2)^2 + (z - 1 \pm \sqrt{2}/2)^2 = 1.$$

582. a. I centri di tutte le sfere che contengono la circonferenza sono sull'asse della circonferenza: $\{x = -1 + t; y = -3t; z = 0\}$; per essere tangenti a $x = 0$ le sfere devono avere raggio $R = |-1 + t|$, inoltre $R^2 = 1 + d^2$ (d distanza del centro dal piano della circonferenza). Si trovano i due valori $t = 0, -2/9$ per cui le due sfere sono $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $(x + 11/9)^2 + (y - 2/3)^2 + z^2 = 121/81$.

b. I punti sono $P_0(-1/7, 2/7, \pm 3/7)$. Le tangenti giacciono su $x = 3y - 1$, e quindi sono ortogonali a $\vec{n}(1, -3, 0)$; sono poi ortogonali anche a $(P_0 - C) = (6/7, 2/7, \pm 3/7)$. Inoltre passano per P_0 . Le tangenti sono quindi: $\{x = -1/7 + 9t; y = 2/7 + 3t; z = \pm 3/7 \mp 20t\}$.

c. Le rette del piano $x = 3y - 1$ che passano per $(2, 1, 1)$ possono essere scritte come $\begin{cases} x = 3y - 1 \\ z - 1 = m(y - 1) \end{cases}$ (ne manca solo una). Per vedere quali di esse sono tangenti basta calcolarne la distanza dal centro $(-1, 0, 0)$ e imporla uguale a 1.

Per calcolare tale distanza occorre determinare la proiezione di $(-1, 0, 0)$ sulla retta che è $\left(\frac{2m^2 - 3m - 10}{10 + m^2}, \frac{m^2 - m}{10 + m^2}, \frac{10 - 10m}{10 + m^2}\right)$ da cui $m = 0, 20/9$. Oppure si possono intersecare le rette con la circonferenza e imporre la coincidenza delle soluzioni ($\Delta = 0$), ricavando gli stessi valori per m .

583. a. Si tratta di trovare a, b in modo che la retta di equazione $\{x = at; y = bt; z = at\}$ abbia distanza $d = \sqrt{1^2 - (1/2)^2} = \sqrt{3}/2$ dal centro $(0, 0, 1)$ della sfera. Per calcolare d si può trovare la proiezione ortogonale di C sulla retta che è $(a^2/(2a^2 + b^2), ab/(2a^2 + b^2), a^2/(2a^2 + b^2))$. Imponendo che la distanza tra $(0, 0, 1)$ e tale punto sia $\sqrt{3}/2$ si trova $4a^4 = b^4$ cioè $2a^2 = b^2$ o $b = \pm\sqrt{2}a$, p.es. $b = \pm\sqrt{2}$; $a = 1$. Le due rette sono: $\{x = t; y = \pm\sqrt{2}t; z = t\}$
- b. Basta intersecare la sfera col piano passante per P, Q e per il centro della sfera che è il piano $x = y$. Il cerchio è: $\{x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0; x = y\}$.
- c. Si considerano i piani passanti per la retta $PQ\{x = y; z = \sqrt{2}y\}$ e cioè i piani del tipo $\lambda(x - y) + \mu(z - \sqrt{2}y)$ e che hanno distanza $\sqrt{1^2 - (\sqrt{3}/2)^2} = 1/2$ dal centro della sfera. Si trova $\mu^2 - 2\sqrt{2}\lambda\mu - 2\lambda^2 = 0$ da cui p.es. $\lambda = 1$ e $\mu = \sqrt{2} \pm 2$. I piani sono $x + (\mp 2\sqrt{2} - 3)y + (\sqrt{2} \pm 2)z = 0$. Le circonferenze sono le intersezioni dei due piani con la sfera.
- d. La retta è tangente perché intersecandola con la sfera si trovano due punti coincidenti: $(0, 0, 2)$. Le circonferenze stanno sui piani che passano per la retta e hanno distanza $\sqrt{1^2 - (\sqrt{3}/2)^2} = 1/2$ da $(0, 0, 1)$. I piani sono quelli di equazione: $3\sqrt{3}x - \sqrt{3}y \pm \sqrt{10}(z - 2) = 0$. Le circonferenze sono perciò le intersezioni tra questi piani e la sfera.
584. Il punto di minima distanza da $(0, 0, 0)$ è il punto della retta congiungente $(0, 0, 0)$ con $(1, 1, 2)$ che ha distanza 2 da $(1, 1, 2)$ (ce ne sono ovviamente due tra i quali è facile scegliere quello cercato). Il punto è $P(1 - \sqrt{6}/3, 1 - \sqrt{6}/3, 2 - 2\sqrt{6}/3)$. Il piano tangente alla sfera in P è $\alpha: x + y + 2z = 6 - 2\sqrt{6}$.
- a. Basta intersecare α con il piano passante per P e ortogonale all'asse y . Si trova quindi:
$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 - 2\sqrt{6} \\ y = 1 - \sqrt{6}/3 \end{cases}$$
- b. Basta intersecare α con l'asse y . Si trova il punto $Q(0, 6 - 2\sqrt{6}, 0)$. La retta cercata è perciò PQ :
$$\begin{cases} x = (1 - \sqrt{6}/3)t \\ y = (6 - 2\sqrt{6}) + (-5 + 5\sqrt{6}/3)t \\ z = (2 - 2\sqrt{6}/3)t \end{cases}$$
585. Il piano α delle circonferenze è quello contenente r, A e $B: x + z = 1$. Le circonferenze hanno centro sull'asse a del segmento AB . La retta a passa per il punto medio tra A e B ed è ortogonale a $(B - A)$ e a $\vec{n}_\alpha$ ed è perciò $\{x = 1/2 + t; y = 1/2 + 2t; z = 1/2 - t\}$. I centri sono i punti di a che sono equidistanti da A e dalla retta r . Dato che la proiezione su r del punto $(1/2 + t, 1/2 + 2t, 1/2 - t)$ è $(1/2 + t, 2, 1/2 - t)$, allora le due distanze sono rispettivamente $|2t - 3/2|$ e $\sqrt{(t - 1/2)^2 + (1/2 + 2t)^2 + (t - 1/2)^2}$; uguagliandole si trova $t = -3/2 \pm \sqrt{3}$. I centri sono i punti $(-1 \pm \sqrt{3}, -5/2 \pm 2\sqrt{3}, 2 \mp \sqrt{3})$; i raggi $2\sqrt{3} \mp 9/2$. Da questi dati si scrivono facilmente le equazioni delle due circonferenze.
586. Sono i punti P della retta r che hanno distanza $\sqrt{3}$ dal piano e cioè $(1/2, 2, 1/2)$ e $(-5/2, -4, 7/2)$.