5. GEOMETRIA ANALITICA: Geometria lineare nel piano

È fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxy.

F 501. Scrivere due diverse rappresentazioni parametriche per le seguenti rette:

a. La retta che passa per i punti $A(-1,3)$ e $B(2,1)$

b. La retta di equazione cartesiana $x = 2$

c. La retta di equazione cartesiana $x - 3y = 4$

F 502. Sia r la retta rappresentata parametricamente a lato.
$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 2 \end{cases}$

a. Scrivere un'altra rappresentazione parametrica per r tale che il punto A di r di ascissa 0 si ottenga per $t = 0$ e quello B di ordinata 0 per $t = 1$.

b. Dividere il segmento $\overline{AB}$ in due e in tre parti uguali.

F 503. Dire se le rette r_1 e r_2 coincidono e se le rette s_1 e s_2 coincidono

$r_1 \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = t - 1 \end{cases}$ $\quad r_2 \begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = t \end{cases}$ $\quad s_1 \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 2 \end{cases}$ $\quad s_2 \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 2 \end{cases}$

F 504. Determinare, se possibile, il coefficiente angolare delle seguenti rette:

a. $2x - y = 4$ $\quad$ b. $y + 4 = 0$ $\quad$ e. $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+7}{1}$ $\quad$ f. $\begin{cases} x = 3t \\ y = t - 1 \end{cases}$

c. $x - 10 = 0$ $\quad$ d. $x = 3y$

F 505. Verificare che le tre rette $x - 2y + 3 = 0$; $3x + y + 2 = 0$; $x - 6y + 7 = 0$ appartengono ad un fascio e determinarne il centro.

F 506. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le tre rette $2kx - ky = 1$; $2x = ky$; $-2kx + y = 1$ appartengono ad un fascio ?

F 507. Nella famiglia di rette $x + 3ky - 5k + 2 = 0$ determinare (se esistono)

a. La retta un cui vettore direzionale sia $(2,1)$.

b. La retta parallela all'asse x e quella parallela all'asse y.

c. Il punto comune a tutte le rette.

C d. Le rette s tali che il triangolo determinato da s e dai due assi coordinati abbia area 7.

F 508. Determinare due punti P della retta $x - y + 2 = 0$ tali che il triangolo POA sia rettangolo in P, dove O è l'origine delle coordinate e $A = (10,0)$.

F 509. Scrivere la retta r rispetto alla quale siano simmetrici $A(0,4)$ e $B(1,-2)$.

F 510. a. Determinare il punto simmetrico di $P(1,1)$ rispetto alla retta $r:\ x - 2y = 1$.

b. Determinare la retta simmetrica di $s:\ x + y = 2$ rispetto alla retta $r:\ x - 2y = 1$.

F 511. Scrivere un'equazione cartesiana che sia soddisfatta da tutti e soli i punti dell'insieme costituito dall'unione delle rette $x = y$; $x = 3y$; $x = 1$.

C 512. Determinare le rette passanti per $P(0,1)$ e formanti con la retta $y = 2x$ un angolo di $\pi/6$..

C 513. Determinare le due bisettrici degli angoli formati dalle rette $2x - y = 0$ e $x + y = 1$ e dire quale di esse è situata nell'angolo minore.

A 514. Tra i punti P della retta $r : 4x - 3y + 2 = 0$ determinare quello il cui simmetrico rispetto alla retta $s : x - 2y = 2$ ha distanza minima da $(0,0)$.

A 515. Date le due rette $r : x + 2y = 2$ $\quad s : \{x = 2 - t \ ; \ y = 3 + 2t\}$ e il loro punto comune P, determinare i punti di r la cui proiezione ortogonale su s dista 5 da P.

A 516. Dati i tre punti $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(6,0)$, determinare un quarto punto D in modo che i quattro punti formino un parallelogramma. In quanti modi è possibile ?

T 517. Determinare il baricentro del triangolo $A(a_1,a_2)$ $B(b_1,b_2)$ $C(c_1,c_2)$

5. GEOMETRIA ANALITICA: Circonferenze nel piano

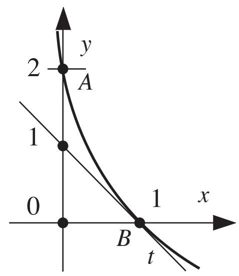
F 521. Scrivere le equazioni delle circonferenze di raggio $\sqrt{5}$, passanti per il punto $(0,0)$ e ivi tangenti alla retta $r:\ 2x = 3y$.

F 522. Scrivere l'equazione delle circonferenze di raggio 1 aventi il centro sull'asse x e tangenti alla retta $y = 2x$.

F 523. Scrivere le equazioni delle circonferenze passanti per i punti $A(-2,2)$ e $B(2,0)$ e tangenti alla retta $r:\ x + y + 2 = 0$.

F 524. Scrivere le equazioni delle rette passanti per $(1,2)$ e tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x + 8y = 0$.

F 525. Scrivere l'equazione della circonferenza γ di cui è raffigurato un arco. Sono evidenti due suoi punti A e B e la retta t tangente a γ in B.



F 526. Tra le rette del fascio di centro $(4,-1)$ determinare quelle che tagliano la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4x$ in una corda di lunghezza 2.

A 527. Tra le circonferenze tangenti alle rette parallele $y = 2x+1$ e $y = 2x+3$ determinare le due che sono tangenti anche alla retta $s : 3x = y$.

A 528. Scrivere le equazioni delle circonferenze con centro sull'asse y e tangenti a $x + y + 1 = 0$ e a $2x - y = 4$.

C 529. Scrivere l'equazione di una circonferenza di raggio 3 con centro sulla retta $r : y = 3x + 2$ e che sia tagliata dalla retta $s : x + y = 2$ in una corda di lunghezza 2.

A 530. Che raggio deve avere una circonferenza di centro $(3,0)$ affinché una delle rette ad essa tangenti in una delle sue intersezioni con $y = 2x$ intercetti l'asse x nel punto $(-3,0)$?

A 531. Siano $r : 2x = y$; $s : 3x + y = 0$ due rette; determinare tra le due bisettrici degli angoli di r e s quella situata nell'angolo minore. Determinare quindi le circonferenze di raggio 2 situate negli angoli minori tra r e s e tangenti sia a r che a s.

C 532. Date le circonferenze $\gamma_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ e $\gamma_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = R^2$.

a. Discutere al variare di $R \in \mathbb{R}$ la reciproca posizione.
b. Nei casi in cui sono tangenti determinare la comune retta tangente.
c. Per $R = 3$ scrivere la retta passante per i punti di intersezione.

A 533. Date le circonferenze $\gamma_1 : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ e $\gamma_2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$, determinare le equazioni delle quattro rette tangenti a entrambe.

5. GEOMETRIA ANALITICA: Geometria lineare nello spazio

È fissato nello spazio un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche destrorso $Oxyz$.

F 541. Sono dati il punto $P = (0,1,2)$ e il piano $\alpha : x - 3y + z = 0$. Determinare:

a. il piano passante per P e parallelo al piano α .
b. due piani passanti per P e ortogonali al piano α.
c. la retta passante per P e ortogonale al piano α .
d. la proiezione ortogonale di P sul piano α.

F 542. Sono dati la retta r e il punto $P = (0,1,2)$. Determinare:

a. la retta passante per P e parallela a r.
b. due rette passanti per P e ortogonali a r.
c. il piano passante per P e ortogonale a r.
d. la proiezione ortogonale di P sulla retta r.
e. la distanza di P da r.
f. la retta passante per P e perpendicolare (e incidente) a r.

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

F 543. È data per ogni $k \in \mathbb{R}$ la retta r di rappresentazione cartesiana $\{x + y = k \quad ; \quad z + k^2 y = 1\}$.

a. Scrivere per ogni $k \in \mathbb{R}$ una rappresentazione parametrica per r.

b. Dire per ogni $k \in \mathbb{R}$ qual è la posizione reciproca della retta e del piano $\alpha:\ x+2y+z=0$.

F 544. Dati i tre punti $A(0,1,0)$ $B(2,1,1)$ $C(0,-1,2)$, dimostrare che non sono allineati e determinare il piano che li contiene.

F 545. Determinare il piano che contiene il punto $P(1,0,3)$ e la retta $r:\ x=y=2-z$.

F 546. Dire per quale $k \in \mathbb{R}$ le rette r e s sono incidenti e per tale k determinare il piano che le contiene.

$$r: \begin{cases} x = -1+t \\ y = 1-t \\ z = 3-t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = t \\ y = k-2t \\ z = 2-t \end{cases}$$

F 547. Sono dati i tre piani α, β, γ al variare di $k \in \mathbb{R}$

a. Determinarne la posizione reciproca per ogni $k \in \mathbb{R}$.

b. Nei casi in cui i tre piani formano un fascio determinare la direzione dell'asse

$$\begin{aligned} \alpha:&\ x+k^2y+z = -4 \\ \beta:&\ 2x+2y+(k+1)z = 0 \\ \gamma:&\ (2-2k^2)y+(4k+3)z = k^2+3 \end{aligned}$$

F 548. Dati il punto $P(1,0,1)$, la retta $r: x-2y=z=0$ e il piano $\alpha: x-3y=z$.

a. Trovare la proiezione ortogonale di P su r e la proiezione ortogonale di P su α.

b. Trovare la proiezione ortogonale di r su α.

F 549. Determinare la retta s giacente sul piano $\alpha:\ x+2y+z=1$ perpendicolare e incidente la retta $r: \{x=y=z\}$

F 550. Data la retta $r:\ \{x=2t \quad ; \quad y=t \quad ; \quad z=-1+3t\}$

a. Scrivere la retta s passante per $P(0,1,0)$ e parallela a r e determinare la distanza tra r e s.

C b. Tra i piani passanti per P e paralleli a r determinare quello che ha distanza massima da r.

F 551. Dati i punti $A(2,1,0)$, $B(1,0,3)$, $C(0,1,1)$:

a. Determinare l'area del parallelogramma di lati AB e AC.

b. Determinare il punto S dello spazio tale che $ABSC$ sia un parallelogramma.

c. Trovare i punti D dell'asse x per cui il volume del parallelepipedo di lati AB, AC, AD è 3.

F 552. Date le rette $r: \{x=y \quad ; \quad z=2\}$ e $s: \{x=3y-2 \quad ; \quad z+y=0\}$

a. Dimostrare che sono sghembe.

b. Scrivere tutte le rette incidenti sia r che s.

c. Tra esse determinare quella ortogonale a entrambe.

d. Tra esse determinare quella parallela alla retta $x=y=z$.

e. Calcolare la distanza d tra r e s.

F 553. Determinare sul piano $\alpha:\ x-2y+z=0$ che contiene il punto $P(1,0,-1)$:

a. la retta r_1 passante per P e ortogonale all'asse x.

b. la retta r_2 passante per P e parallela al piano $\beta:\ 3x=z$.

c. la retta r_3 passante per P e incidente la retta $s:\ x-3y=z-2=0$.

F 554. Tra le rette perpendicolari e incidenti alla retta r nel suo punto $P(0,0,2)$ determinare:

a. quella incidente la retta $s: \{x=y=z\}$

b. quella ortogonale a s.

A c. quelle che hanno distanza 1 da s.

$$r: \begin{cases} x-y=0 \\ z=3y+2 \end{cases}$$

C 555. Determinare il punto della retta $r:\ x=y=z-1$ la cui proiezione ortogonale sulla retta $s:\ x-2y=z+x=0$ sia l'origine delle coordinate.

C 556. Tra le rette uscenti da $P(1,2,-1)$ e parallele al piano $\alpha:\ x+3y-z=1$ determinare quella incidente la retta $r: \{x=3y \quad ; \quad z=x+1\}$.

C 557. Date le rette r e s

a. Dimostrare che r e s sono sghembe.

b. Determinare la loro distanza d.

$$r: \begin{cases} x-z=1 \\ y=1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x-y+3=0 \\ x-2z+5=0 \end{cases}$$

c. Determinare la perpendicolare comune e i punti P_r, P_s di minima distanza.

d. Determinare il piano parallelo a entrambe e da esse equidistante.

A e. Determinare i piani α contenenti r tali che la proiezione di P_s su α abbia distanza 1 da P_s.

A f. Determinare i punti di r che distano $2d$ da s.

C 558. Consideriamo tutte le rette s giacenti sul piano $\alpha :\ x+y=2$ e incidenti la retta r. Per ognuna di esse sia θ l'angolo che s forma con r (quello compreso tra 0 e $\pi/2$). Determinare tra le rette s quelle tali che: $r : \begin{cases} x = y+2 \\ z = 2x \end{cases}$

a. θ sia massimo. b. θ sia minimo. c. $\theta = \pi/3$

559. Dati il punto $P(1,0,2)$, la retta $r : \{x = 2y = z+1\}$ e il piano $\alpha : 3x-2y+z=0$.

F a. Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a r.

F b. Determinare il punto P'' simmetrico di P rispetto ad α.

F c. Determinare il punto O' simmetrico di O rispetto a P.

C d. Determinare la retta r' simmetrica di r rispetto a P.

F e. Determinare la retta r'' simmetrica di r rispetto ad α.

C f. Determinare la retta x' simmetrica dell'asse x risp. a r.

C g. Determinare il piano α' simmetrico di α rispetto a P.

A h. Determinare il piano α'' simmetrico di α rispetto a r.

A i. Determinare il piano β simmetrico di $z=0$ rispetto ad α.

C 560. Determinare i simmetrici del punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$, della retta $r : \{x = x(t)\,;\ y = y(t)\,;\ z = z(t)\}$ e del piano $\alpha : ax+by+cz=d$ rispetto al punto $(0,0,0)$, alla retta $x=y=0$ e al piano $z=0$.

A 561. Determinare i piani passanti per il punto $P(0,2,0)$, paralleli alla retta $r : \{x-y=z\ ;\ y=2x\}$ e aventi distanza 1 da r.

A 562. Determinare (se esiste) la retta passante per $P(1,1,1)$ e incidente le due rette r e s nei due casi seguenti.

a. $r : \{x = 2y-1 = -z\}$, $s : \{x = 2 \quad ; \quad y = 3z\}$

b. $r : \{x = -y-1 = -z\}$, $s : \{x = \quad ; \quad y = 3z\}$

5. GEOMETRIA ANALITICA: Sfere e circonferenze nello spazio

F 571. Sono dati la sfera S di equazione $x^2+y^2+z^2+4y-3z=0$ e il piano α di equazione $x+2y+z=2$.

a. Determinare centro e raggio di S.

b. Dire perché l'intersezione tra S e α è una circonferenza e determinarne centro, raggio e asse.

c. Determinare i piani paralleli al piano α e tangenti a S.

d. Determinare i piani paralleli al piano α che tagliano S in una circonferenza di raggio $1/2$.

e. Determinare i due punti P_1 e P_2 di intersezione di S con la retta $\{x = t \quad ; \quad y = t \quad ; \quad z = t\}$ e scrivere i piani tangenti a S in P_1 e P_2.

f. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ dire se la retta $\{x = t+1 \quad ; \quad y = kt \quad ; \quad z = 3\}$ è incidente, tangente o esterna a S.

F 572. Sono dati la retta $r : \{z = x-3 \quad ; \quad y = 1\}$ e il punto $P(0,2,1)$.

a. Scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza γ ottenuta ruotando P attorno a r, in altre parole la circonferenza avente asse r e passante per P.

b. Determinare la retta t tangente a γ in P.

c. Determinare le sfere di raggio 9 contenenti γ.

d. Determinare le sfere contenenti γ e tangenti al piano $\alpha : x = 5$.

F 573. Sono dati i quattro punti $C_0(0,1,1)$ $A(2,0,0)$ $B(1,3,2)$ $C(1,-1,0)$

a. Dire perché esiste una sfera S di centro C_0 e passante per A, B, C e scrivere una rappresentazione cartesiana per S.

b. Scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza γ giacente su S e passante per A, B, C.

c. Scrivere l'asse a, il centro C_1 e il raggio R_1 di γ.

d. Scrivere una rappresentazione parametrica per la retta tangente a γ in A.

F 574. a. Scrivere l'equazione di tutte le sfere tangenti in $(1,1,0)$ al piano $x=y$.

b. Tra tali sfere determinare quelle di raggio $\sqrt{2}$.

c. Tra tali sfere determinare quelle tangenti anche al piano $x+z=3$.

F 575. Data la sfera S di equazione $4x^2+4y^2+4z^2-4x+8z+1=0$ e la retta $r:\{x-y=0 \quad ; \quad z=0\}$, verificare che r è esterna a S e scrivere i piani del fascio di asse r tangenti a S.

F 576. Determinare una rappresentazione cartesiana per la circonferenza di centro $C\,(0,1,2)$ e tangente alla retta $r:\ \{x=1+2t \quad ; \quad y=1+t \quad ; \quad z=-t\}$.

F 577. Date le due rette $r:\{x-z=1 \quad ; \quad y+2z=1\}$ e $s:\{x=t \quad ; \quad y=2 \quad ; \quad z=3-t\}$

a. Dimostrare che sono ortogonali e sghembe e determinarne la distanza.

b. Dire perché esiste una circonferenza di asse r e tangente a s e scriverne una rappresentazione cartesiana.

F 578. Determinare una sfera di raggio 2, con centro sulla retta $r:\ x=y=z-1$ e tangente al piano $\alpha:\ x=3y$.

F 579. Dato il triangolo $\mathcal{T}:ABC$, con $A(1,0,2)$, $B(2,1,0)$, $C(0,-1,1)$

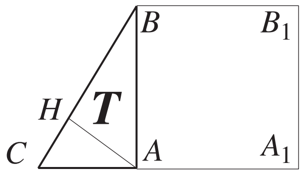
a. Dire perché il triangolo $\mathcal{T}$ è rettangolo in A.

b. Determinare il punto H, proiezione di A sull'ipotenusa e misurare l'altezza $\overline{AH}$.

c. Scrivere una rappresentazione cartesiana per il piano α su cui giace $\mathcal{T}$.

d. Determinare una rappresentazione cartesiana per la circonferenza circoscritta a $\mathcal{T}$.

e. Nel piano di $\mathcal{T}$, costruire il quadrato AA_1B_1B sul cateto AB determinando il punto A_1 sul prolungamento del cateto AC e il quarto punto B_1 come in figura.



C 580. Dati i tre punti $A(0,1,1)$, $B(1,1,0)$ e $C(1,-1,1)$, verificare che non sono allineati e determinare la circonferenza passante per A,B,C.

C 581. Determinare le sfere di raggio 1, con centro sul piano $x=y-z$, tangenti ai piani $x=0$ e $y+z=1$.

A 582. Sia γ la circonferenza del piano $x=3y-1$ avente centro $(-1,0,0)$ e raggio 1.

a. Scrivere le due sfere contenenti γ e tangenti al piano $x=0$.

b. Scrivere le rette tangenti alla circonferenza nei suoi punti di ascissa $-1/7$.

c. Condurre dal punto $P(2,1,1)$ (che giace sul piano $x=3y-1$) le tangenti alla circonferenza.

A 583. Data la sfera $S:\ x^2+y^2+z^2-2z=0$

a. Tra le rette passanti per $(0,0,0)$ e parallele al piano $x=z+1$, determinare quelle che staccano su S una corda di lunghezza 1.

b. Determinare il cerchio massimo di S passante per $P(0,0,0)$ e per $Q(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,1)$.

c. Determinare le circonferenze di raggio $\sqrt{3}/2$ giacenti su S e passanti per P e Q.

d. Verificato che la retta $r:\ \{z=2 \quad ; \quad y=3x\}$ è tangente a S, determinare le circonferenze di raggio $\sqrt{3}/2$ giacenti su S e tangenti a r.

A 584. Tra le rette tangenti alla sfera di centro $(1,1,2)$ e raggio 2 nel suo punto di minima distanza da $(0,0,0)$ determinare :

a. quella ortogonale all'asse y.

b. quella incidente l'asse y.

A 585. Verificare che i punti $A(1,0,0),B(0,1,1)$ e la retta $r:\{x+z=1 \quad ; \quad y=2\}$ sono complanari e determinare le circonferenze passanti per A e B e tangenti a r.

A 586. Determinare i punti P della retta $r\{x=t \quad ; \quad y=2t+1 \quad ; \quad z=1-t\}$ tali che la sfera di centro P e tangente al piano $x+y+z=0$ abbia raggio $\sqrt{3}$.