ANALISI MATEMATICA e GEOMETRIA

Corsi di Laurea e di Diploma in Ingegneria Biomedica e delle Telecomunicazioni

Correzione del compito scritto del 21 Gennaio 2000 – Anno Accademico 1999/2000

ANALISI

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\log x}{|x-e^{-1}|^\alpha} & \text{se } x \in (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty) \\ 0 & \text{se } x = e^{-1}, \end{cases}$$

dove α è un parametro reale ed il logarirmo è il logaritmo naturale. Si determini per quali valori di α la funzione f è continua in e^{-1}.

Soluzione. Se $\alpha \leq 0$, evidentemente f è infinitesima per $x \to e^{-1}$, quindi continua in e^{-1}. Se $\alpha > 0$, applichiamo il Teorema di de l'Hôspital; per $x > e^{-1}$

$$\lim_{x\to(e^{-1})^+} \frac{\frac{d}{dx}(1+\log x)}{\frac{d}{dx}(x-e^{-1})^\alpha} = \lim_{x\to(e^{-1})^+} \frac{1}{x\alpha(x-e^{-1})^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ e & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1, \end{cases}$$

mentre per $x < e^{-1}$

$$\lim_{x\to(e^{-1})^-} \frac{\frac{d}{dx}(1+\log x)}{\frac{d}{dx}(e^{-1}-x)^\alpha} = \lim_{x\to(e^{-1})^-} \frac{-1}{x\alpha(e^{-1}-x)^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ -e & \text{se } \alpha = 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Quindi per $0 < \alpha < 1$ abbiamo continuità. In conclusione, f è continua in e^{-1} per $\alpha < 1$.

Esercizio 2 . Sia $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^n}{x-1}\right)$, con n intero positivo.

(a) Si determinino i punti critici di f, cioè i punti in cui si annulla la derivata prima di f.

(b) Si discuta, senza calcolare la derivata seconda di f, la natura dei punti critici trovati, se si tratta cioè di punti di massimo relativo, minimo relativo o di punti di sella.

Soluzione. (a) Calcolando, si ha, per $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^n}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{nx^{n-1}(x-1)-x^n}{(x-1)^2} = \frac{x^{n-1}[(n-1)x-n]}{(x-1)^2+x^{2n}}.$$

Pertanto $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ oppure $x = n/(n-1)$.

(b) Dal calcolo svolto in (a), è evidente che f' ha il segno del polinomio $x^{n-1}[(n-1)x-n]$. Analizziamo dapprima il punto $x_0 = 0$. Per x in un intorno destro di x_0 risulta $x^{n-1} > 0$ mentre $(n-1)x - n < 0$, cosicché f decresce a destra di x_0. Per x in un intorno sinistro di x_0 si ha ancora $(n-1)x - n < 0$ mentre $x^{n-1} > 0$ per n dispari e $x^{n-1} < 0$ per n pari. Quindi f ha in x_0 un massimo relativo per n pari ed un punto di sella per n dispari. Analizziamo poi il punto $x_1 = n/(n-1)$. Siccome in un intorno di tal punto $x^{n-1} > 0$, f risulterà decrescente in un intorno sinistro di x_1 e crescente in un intorno destro: x_1 è un punto di minimo relativo di f.

Esercizio 3. Sia $f(x) = 2(\log x)^2 - \log x$, dove, al solito, il logaritmo è quello naturale.
(a) Si stabilisca per quali x si ha $f(x) = 0$;
(b) si calcoli il polinomio di Taylor di secondo grado di f nel punto $x_0 = 1$;
(c) si stabilisca in quali intervalli f risulta convessa.

Soluzione. (a) Dal momento che $f(x) = (2\log x - 1)\log x$, dovrà essere $\log x = 1/2$, cioè $x = \sqrt{e}$, oppure $\log x = 0$, cioè $x = 1$.

(b) Calcolando:

$$f'(x) = \frac{4\log x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{4\log x - 1}{x}, \qquad f''(x) = \frac{\frac{4}{x}x - (4\log x - 1)}{x^2} = \frac{5 - 4\log x}{x^2}.$$

Pertanto, $f(1) = 0$, $f'(1) = -1$ e $f''(1) = 5$, cosicché il polinomio cercato è $-(x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2$.

(c) Il dominio di f è $(0, +\infty)$, insieme nel quale f risulta derivabile due volte, come stabilito in (b). Pertanto f sarà convessa negli intervalli nei quali $f'' > 0$, cioè ogniqualvolta $5 - 4\log x > 0$, ossia per $x \in (0, e^{5/4})$.