NOME ______________ COGNOME ______________ CORSO ______________

Esame di Analisi 1 + Geometria 1 - Corso E - 21 gennaio 2000

Testo composto di tre fogli (cinque pagine). Rispondere alle seguenti domande su questi fogli usando gli appositi spazi e giustificando, ove richiesto, tutte le risposte.

punti 4 $\boxed{\mathcal{A}}$ Dire per ogni $a \in \mathbb{R}$ quante soluzioni ha il sistema lineare a lato e perché

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a-1 & a-2 & 0 & 1 \\ a-2 & a & a-1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante della sottomatrice costituita dalle prima tre colonne della matrice incompleta:

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a-1 & a-2 & 0 \\ a-2 & a & a-1 \end{pmatrix} = a(a-2)(a-1).$$

Quindi, se $a \neq 0, 1, 2$, la matrice incompleta ha caratteristica 3 e così pure quella completa, pertanto il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Sia ora $a = 0$. La matrice completa è: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

La prima riga si elimina subito e le due matrici hanno evidentemente caratteristica 2, quindi il sistema ha ∞^2 soluzioni.

Sia ora $a = 1$. Riduciamo la matrice completa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) R_3 \to R_3 + R_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) R_3 \to R_3 + R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Evidentemente il sistema non ha soluzioni.

Sia ora $a = 2$. Riduciamo la matrice completa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) R_2 \to R_2 - 1/2 R_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Anche in questo caso evidentemente il sistema non ha soluzioni.

Conclusione:
Se $a = 1$ o $a = 2$, nessuna soluzione.
Se $a = 0$, allora ∞^2 soluzioni.
Se $a \neq 0, 1, 2$, allora ∞^1 soluzioni.

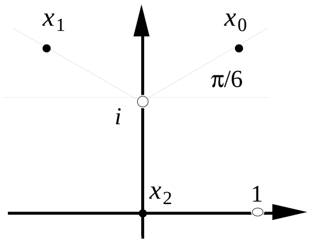
punti 4 $\boxed{\mathcal{B}}$ Scrivere nella forma $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ le radici complesse del polinomio $(x - i)^3 - i$ e disegnarle nel piano di Argand-Gauss.

Poniamo $Z = x - i$. L'equazione da risolvere è $Z^3 - i = 0$ o anche $Z^3 = i$ e $Z^3 = e^{\pi i/2}$ le cui soluzioni sono $Z_i = e^{\pi i/6 + 2k\pi i/3}$ $k = 0, 1, 2$, cioè in forma $a + bi$:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) &&= \sqrt{3}/2 + i/2 \\ Z_1 &= \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6) &&= -\sqrt{3}/2 + i/2 \\ Z_2 &= \cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2) &&= -i \end{aligned}$$

quindi le soluzioni dell'equazione originale sono:

$$\begin{aligned} x_0 &= Z_0 + i &&= \sqrt{3}/2 + 3i/2 \\ x_1 &= Z_1 + i &&= -\sqrt{3}/2 + 3i/2 \\ x_2 &= Z_2 + i &&= 0 \end{aligned}$$



$\boxed{\mathcal{C}}$ Sia $W = \left\{ A \in M_{22}(\mathbb{R}) \ : \ A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ sia simmetrica} \right\}$

punti 1 — 1. Dire perché W è sottospazio di $M_{22}(\mathbb{R})$.

Poniamo $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
W è sottospazio perché, se $A_1, A_2 \in W$, allora A_1B e A_2B sono simmetriche. Se quindi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ anche $\lambda_1 A_1 B$ e $\lambda_2 A_2 B$ sono simmetriche.
Si ha: $(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \cdot B = \lambda_1 A_1 \cdot B + \lambda_2 A_2 \cdot B$. Dato che somma di matrici simmetriche è simmetrica, allora $(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \cdot B$ è simmetrica e quindi $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in W$.

---

punti 3 — 2. Scrivere una base per W.

Poniamo $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. *Allora* $A \cdot B = \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ z & 2z - t \end{pmatrix}$, *quindi $A \cdot B$ è simmetrica se e solo se* $2x - y = z$.
Pertanto W è costituita dalle matrici $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ *tali che $2x - y = z$, cioè dalle matrici del tipo*
$\begin{pmatrix} x & y \\ 2x - y & t \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Quindi ogni matrice di W è combinazione lineare delle tre matrici sopra che ne costituiscono un sistema di generatori. Le tre matrici poi sono linearmente indipendenti, dato che se* $x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
allora si vede subito che: $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ 2x - y & = & 0 \\ t & = & 0 \end{array} \right.$ *, cioè $x = y = t = 0$. Quindi costituiscono base per W.*

---

punti 4 $\boxed{\mathcal{D}}$ Nell' $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V_3 nel quale le coordinate dei vettori sono riferite ad una base ortonormale, siano $\vec{w}_1 = (0, 2, -1)$, $\vec{w}_2 = (1, 0, 1)$ e sia $W = L\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$
Trovare tutti i $\vec{w} \in W$ che formano un angolo di $\pi/3$ con $\vec{w}_2$.

I vettori sono del tipo $a(0, 2, -1) + b(1, 0, 1) = (b, 2a, -a + b)$ e occorre che $\dfrac{(b\,,\, 2a\,,\, -a + b) \cdot (1, 0, 1)}{|\,(b\,,\, 2a\,,\, -a + b)\,|\,|\,(1, 0, 1)\,|} = \dfrac{1}{2}$,
cioè $\dfrac{2b - a}{\sqrt{5a^2 + 2b^2 - 2ab}\,\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$, *da cui* $4b - 2a = \sqrt{10a^2 + 4b^2 - 4ab}$. *Possiamo elevare a quadrato questa equazione supponendo $4b - 2a > 0$ e si ottiene, dopo aver diviso per 6,l'equazione omogenea di secondo grado* $a^2 + 2ab - 2b^2 = 0$ *che si può scrivere (ponendo $b \neq 0$)* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + 2\left(\dfrac{a}{b}\right) - 2 = 0$ *da cui* $(a/b) = -1 \pm \sqrt{3}$.
Sostituendo $a = (-1 \pm \sqrt{3})b$, i vettori sono quindi $\left(b\,,\, 2(-1 \pm \sqrt{3})b\,,\, (2 \mp \sqrt{3})b\right)$, ma occorre che $4b - 2a > 0$.
Nel caso $a = (-1 + \sqrt{3})b$ si ha: $4b - 2(-1 + \sqrt{3})b > 0$, cioè $(6 - 2\sqrt{3})b > 0$, ovvero $b > 0$.
Nel caso $a = (-1 - \sqrt{3})b$ si ha: $4b - 2(-1 - \sqrt{3})b > 0$, cioè $(6 + 2\sqrt{3})b > 0$, ovvero sempre $b > 0$.
Quindi i vettori sono cercati sono:

$$\left(b\,,\, 2(-1 \pm \sqrt{3})b\,,\, (2 \mp \sqrt{3}b)\right) \qquad \text{con } b > 0$$