G.01

COGNOME ____________________ NOME ____________________

Esame di Matematica 3
2 febbraio 2007

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

$\boxed{3}$ $\boxed{\mathcal{A}}$ È data la matrice $A \in M_{44}(\mathbb{R})$

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Esaminare attentamente le colonne di A e le loro relazioni e dedurne norma e numero di condizionamento di A.
2. Osservare che A è simmetrica e dedurre da [1.] quali sono gli autovalori di A.
3. Verificare che il sistema $Ax = b$ con $b = [1\ 2\ 3\ 4]^T$ ha la soluzione $[5 \quad -1 \quad -2 \quad 0]^T$.
4. Senza calcolarla, dare una stima per la soluzione di $Ax = b_1$ con $b_1 = [0.9 \quad 2.1 \quad 3.1 \quad 3.9]^T$

$\boxed{3}$ $\boxed{\mathcal{B}}$ Riconoscere la quadrica $\Gamma : x^2 + y^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 2x = 0$, dire perché è rigata e scrivere le due rette giacenti su Γ e passanti per $(0, 0, 0)$.

5 $\boxed{\mathcal{C}}$ Dati i tre punti $A(2, 0, \sqrt{2})$, $B(0, 2, \sqrt{2})$, $C(1, 1, 0)$

1. Scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza γ passante per i tre punti.
2. Scrivere il cilindro contenente γ e con generatrici parallele all'asse x.
3. Scrivere il cono di vertice $V(0, 0, \sqrt{2})$ contenente γ.

COGNOME ______________________ NOME ______________________

Esame di Matematica 3
15 febbraio 2007

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

$\boxed{5}$ $\boxed{\mathcal{A}}$ È data la matrice $A \in M_{33}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ ha il numero di condizionamento migliore.

In $\mathbb{R}^3$ definiamo $\langle v, w \rangle_* = v^T \cdot A \cdot w$, ($v$ e w vettori colonna).

2. Dire per quali k quello sopra definito è un prodotto scalare.

Per $k = 1$, col prodotto scalare sopra definito e la norma associata $\| \ \|_*$

3. Scrivere una base ortonormale per $\mathbb{R}^3$.
4. Descrivere $\{v \in \mathbb{R}^3 \ : \| \ v \ \|_* = 1\}$

$\boxed{2}$ $\boxed{\mathcal{B}}$ Riconoscere la quadrica : $x^2 + 5y^2 + z^2 + 5y = 1$, dire perche è di rotazione e scrivere la rappresentazione cartesiana di una circonferenza di raggio 1 giacente su essa.

$\boxed{4}$ $\boxed{\mathcal{C}}$ Dati i tre punti allineati (verificare !) $C(3, 2, 3)$, $v_1(2, 1, 2)$, $C_1(1, 0, 1)$, scrivere un'iperboloide a due falde che abbia C come centro, un vertice in V_1 e contenga la circonferenza di centro C_1, asse $\overline{CC_1}$ e raggio 1.

G.05

COGNOME ______________________ NOME ______________________

Esame di Matematica 3
30 marzo 2007

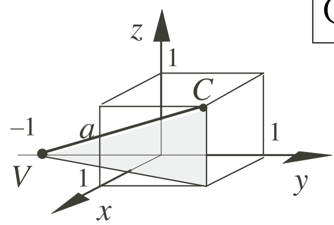
Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

$\boxed{3}$ $\boxed{\mathcal{A}}$ È data la matrice $A \in M_{33}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

1. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il prodotto definito in $\mathbb{R}^3$ come $\langle v, w\rangle_* = v^T \cdot A \cdot w$, ($v$ e w vettori colonna), è un prodotto scalare.
2. Scegliere un k per cui $(1,1,1)$ sia ortogonale a $(1,0,1)$ o a $(1,0,3)$ o a $(1,0,6)$ e per questo k scrivere una base o.n. per $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{3}$ $\boxed{\mathcal{B}}$ Riconoscere la quadrica $\Gamma : 4xz + y^2 + 2x + 2z + 1 = 0$, dire se è rigata e individuare su essa (se possibile), una parabola, un'ellisse, un'iperbole, una coppia di rette incidenti e una coppia di rette coincidenti.



$\boxed{5}$ $\boxed{\mathcal{C}}$ Dati i due punti $V(0,-1,0)$, $C(1,1,1)$ e la retta a per V e C.

1. Scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza γ di asse a , centro C e raggio 1.
2. Scrivere il cilindro contenente γ e con generatrici parallele all'asse x.
3. Scrivere il paraboloide ellittico di vertice V contenente γ.

G.07

COGNOME ____________________ NOME ____________________

Esame di Matematica 3
21 maggio 2007

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

$\boxed{4}$ $\boxed{\mathcal{A}}$

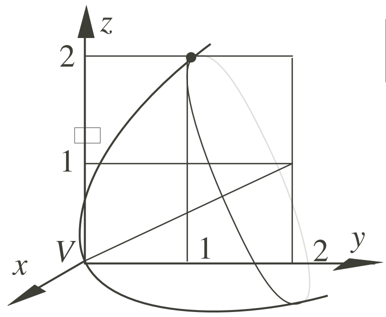
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il prodotto in $\mathbb{R}^3$ definito come $\langle v, w \rangle = v^T \cdot A \cdot w$ (v e w vettori colonna) è un prodotto scalare.
2. Dire se c'è un k per cui $(1, 1, 1)$ e $(1, 1, 0)$ sono ortogonali.
3. Dire se c'è un k per cui $(0, 1, 0)$ e $(0, 1, 2)$ sono ortogonali.
4. Per il k trovato in uno dei delle due domande precedenti trovare una base ortonormale per $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{3}$ $\boxed{\mathcal{B}}$

1. Riconoscere la quadrica $Q : x^2 + 2y^2 + 2xy + z^2 + 2yz + 2y + 1 = 0$ e dire se è di rotazione.
2. Scrivere il vettore direzionale di un suo asse di simmetria.
3. Scrivere la rappresentazione cartesiana di una qualunque parabola giacente su Q.

G.08



$\boxed{4}$ $\boxed{\mathcal{C}}$ Determinare una rappresetazione cartesiana per la parabola γ che

- Ha vertice $V(0,0,0)$
- Ha come asse la retta $\{x = 0\ ;\ y = 2z\}$
- Passa per il punto $P(0,1,2)$

Scrivere poi il paraboloide ellittico ottenuto ruotando la parabola attorno al suo asse.

COGNOME ______________________ NOME ______________________

Esame di Matematica 3
15 giugno 2007

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

$\boxed{3}$ $\boxed{\mathcal{A}}$ È data la matrice $A \in M_{33}(\mathbb{R})$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

1. Verificare che la soluzione del sistema $Ax = [1 \quad 3 \quad 1]^T$ è $x = [-14 \quad 5 \quad 4]$ e che la soluzione del sistema $Ax = [1.2 \quad 2.9 \quad 0.9]^T$ è $x_1 = [0.3 \quad 0.3 \quad 0.1]$
2. Dire quali informazioni sugli autovalori di A si possono dedurre da tali dati.

$\boxed{4}$ $\boxed{\mathcal{B}}$ Data la quadrica : $2xy + z^2 + 2yz + z = 0$

1. Riconoscerla, dire se è di rotazione e scrivere tutte le rette giacenti su essa.
2. Scrivere la rappresentazione di un'iperbole e di un'ellisse e di una parabola giacenti su essa.

4 $\boxed{\mathcal{C}}$ Dati i due punti $V_1(2,0,2)$, $V_2(0,2,0)$; scrivere l'iperboloide di rotazione a due falde che abbia vertici in V_1 e V_2 e passi per $P(4,0,6)$.

COGNOME ______________________ NOME ______________________

Esame di Matematica 3
2 luglio 2007

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

$\boxed{3}$ $\boxed{\mathcal{A}}$ È data la matrice $A \in M_{33}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Verificare che la soluzione del sistema $Ax = [4 \quad 5 \quad 1 \quad 6]^T$ è $x = [-2 \quad 5 \quad 1 \; -1]$ e che la soluzione di $Ax = [3.9 \quad 5.2 \quad 1 \quad 5.9]^T$ è $x_1 = [1/2 \quad 6/5 \quad 1/20 \quad 7/8]$
2. Dire quali informazioni sugli autovalori di A si possono dedurre da tali dati *e perché*.

$\boxed{4}$ $\boxed{\mathcal{B}}$ Data la quadrica $: y^2 + 2xz + 2yz + y = 0$

1. Riconoscerla, dire se è di rotazione e scrivere tutte le rette giacenti su essa.
2. Scrivere la rappresentazione di un'iperbole e di un'ellisse e di una parabola giacenti su essa.

4 $\boxed{\mathcal{C}}$ Dati i due punti $C(0,2,2)$, $V_1(2,0,0)$; scrivere l'iperboloide di rotazione a due falde che abbia centro in C e un vertice in V_1 e passi per $P(4,0,2)$.

COGNOME ____________________ NOME ____________________

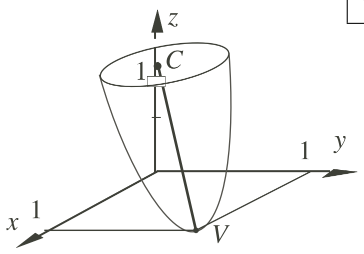
Esame di Matematica 3
14 settembre2007

Parte di Geometria. Testo composto da un foglio (due pagine). Rispondere alle domande su questi fogli negli appositi spazi e con giustificazioni brevi, ma esaurienti.

3 $\boxed{\mathcal{B}}$ In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare associato alla matrice A sia $W = L\{(1,1,1,1),(0,0,a,1)\}$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

1. Per un $a \in \mathbb{R}$ a scelta, determinare una base ortonormale per W.
2. Posto $w = (1,0,0,1)$, calcolare la proiezione w_1 di w su W e confrontare $\| w \|$ e $\| w_1 \|$.

4 $\boxed{\mathcal{B}}$ Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la quadrica Q di rappresentazione cartesiana $x^2 + ky^2 - 2xz + 2z^2 + (2k-2)y = 0$.
(Suggerimento: $(0,0,0)$ è sempre un punto di Q e il piano tangente in quel punto dà informazioni).



4 $\boxed{\mathcal{C}}$ Dati i due punti $V(1,1,0)$, $C(0,0,1)$ e la retta a passante per V e C.

1. Scrivere una rappresentazione cartesiana per la circonferenza γ di raggio 1 avente come centro C e come asse la retta a.
2. Scrivere una rappresentazione cartesiana per il paraboloide ellittico di vertice V e asse a, contenente la circonferenza γ.

COGNOME ______________________ NOME ______________________

Esame di Matematica 3
14 gennaio 2008

Parte di Geometria. Testo composto da due pagine. Rispondere alle domande su questi fogli usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

$\boxed{\mathcal{A}}$ Nello spazio vettoriale $C^0([-1,1])$ è definito un nuovo prodotto scalare nel seguente modo: $\langle f, g\rangle_1 = \int_{-1}^{1} f \cdot g \cdot x^2\, dx$

1. Verificare che si tratta di un prodotto scalare.
2. Scrivere una base ortonormale per il sottospazio $W = L\{1, x\}$.

$\boxed{\mathcal{B}}$

1. Dire perché la quadrica $Q : x^2 - 2yz + 2z^2 + 2y - 2z = 0$ è un cono e determinarne il vertice e <u>tutte le rette</u>.
2. Verificare che $(0,0,0)$ è un suo punto e determinare un'ellisse, un'iperbole e una parabola giacenti su Q e passanti per O.

$\boxed{\mathcal{C}}$

1. Verificare che il sistema a lato rappresenta una circonferenza γ e scriverne il centro.
2. Scrivere l'iperboloide a una falda avente γ come cerchio di gola e passante per $(0, 0, 3)$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 6z = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

Cognome ________________ Nome ________________

Esame di Matematica 3
4 febbraio 2008

Parte di Geometria. Testo composto da due pagine. Rispondere alle domande su questi fogli usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

$\boxed{\mathcal{A}}$ Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$dotato del prodotto scalare euclideo, scrivere la distanza del vettore $(1,1,1,1)$ dal sottospazio $W = L\{(0,1,0,0),(0,0,1,2),(1,1,1,0)\}$

$\boxed{\mathcal{B}}$ Senza calcolarlo esplicitamente, maggiorare il numero di condizionamento della matrice A calcolando i prodotti Av e Av_1 con $v = (0,1,0)$ e $v_1 = (5,-5,4)$ (scritti in colonna) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Data la quadrica $2x^2 - y^2 + 4xy + kz^2 + 2y = 0$

$\boxed{\mathcal{C}}$

$\boxed{\text{G.18}}$

1. Dire per ogni $k \in \mathbb{R}$ di che quadrica si tratta.
2. Dire per quali k la quadrica è di rotazione. **In questi casi**:
3. Determinare l'asse di rotazione e, se è rigata, scriverne due rette.
4. Scrivere una trasformazione di coordinate rispetto alla quale la quadrica assuma equazione canonica.

COGNOME ______________________ NOME ______________________

Esame di Matematica 3
18 febbraio 2008

Parte di Geometria. Testo composto da due pagine. Rispondere alle domande su questi fogli usando gli appositi spazi e giustificando brevemente ma esaurientemente tutte le risposte.

$\boxed{\mathcal{A}}$ Nello spazio vettoriale $C^\infty([0,2\pi])$dotato del prodotto scalare usuale (coll'integrale), proiettare la funzione $\sin(x)$ sul sottospazio $W = L\{1, x\}$ usando la proprietà di ortogonalità della proiezione rispetto alla base data di W.

$\boxed{\mathcal{B}}$ La matrice 4×4 inquadrata B ha autovalori circa -7.64 , -1.34 , 4.14 , 6.83. Descrivere che condizionamento ha la matrice 5×5 al variare di $k \in \mathbb{R}$, spiegando bene perché

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right)$$

$\boxed{\mathcal{C}}$

1. Riconoscere la quadrica $\mathcal{Q}:\ 2xy - 4xz + y^2 + z^2 = 0$.
2. Verificare che $P(1,1,1)$ è un suo punto, scrivere il piano tangente a $\mathcal{Q}$ in P e dire cosa è l'intersezione tra il piano e $\mathcal{Q}$.
3. Usare i conti precedenti per scrivere la rappresentazione cartesiana di una qualunque parabola giacente su $\mathcal{Q}$.

$\boxed{\mathcal{D}}$ Dati i punti $C(1,0,0)$ e $V(0,1,1)$, scrivere il paraboloide ellittico di vertice V e contenente la circonferenza che ha centro C, raggio 1 e come asse la retta VC.