BASI ORTONORMALI, MATRICI ORTOGONALI

01. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalla base $\mathcal{B}$: $(1,0,2),(0,2,-1)$. Verificare che anche $\mathcal{C}$: $(1,2,1),(1,4,0)$ è base per V e ortonormalizzare le due basi mediante l'algoritmo di Gram-Schmidt.

02. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare euclideo, completare i due vettori ortogonali $v_1(1,0,-1,1)$, $v_2(1,1,1,0)$ a base ortogonale di $\mathbb{R}^4$, mediante due vettori v_3, v_4.

03. Dire perché è possibile completare la matrice $P \in M_{33}(\mathbb{R})$ in modo che sia ortogonale e abbia determinante positivo e completarla, indi calcolare P^{-1}.
$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & * \\ 2/3 & 2/3 & * \\ 1/3 & * & * \end{pmatrix}$$

04. Data la matrice reale incompleta $P \in M_{33}(\mathbb{R})$, completarla *in tutti i modi possibili* in modo che sia ortogonale.
$$P = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & * \\ 2/3 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

05. Determinare una base ortonormale per ognuno dei seguenti spazi vettoriali.
   a. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x-2y+z=0\}$
   b. $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+2y-z=t\}$
   c. $U = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x+z=2y=t-2u\}$
   d. $Z = L\{1,1,0,1),(1,0,1,2),(0,-1,1,1)\}$

MATRICI SIMMETRICHE E TEOREMA SPETTRALE

11. Verificare che i due vettori $(2,-1,0),(0,1,1)$ sono autovettori per la matrice A aventi lo stesso autovalore e determinare tale autovalore.
Senza calcolarlo direttamente, ma usando il teorema spettrale, trovare un altro autovalore e un altro autovettore.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

12. Data la matrice simmetrica A.
   a. Determinare una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per A.
   b. Scrivere una matrice ortogonale P e una diagonale D tali che $P^TAP = D$.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

13. Diagonalizzare le seguenti matrici simmetriche reali mediante una matrice ortogonale a determinante positivo (determinare cioè P matrice ortogonale *con determinante* 1 e D matrice diagonale tali che $P^TAP = D$ etc.).
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Diagonalizzare le seguenti matrici simmetriche reali per mezzo di una matrice ortogonale avente determinante 1.
A matrice $n \times n$ tutta costituita da 1 ($a_{i\,j} = 1\,,\ \forall\, i,j$)
B matrice $n \times n$ tutta costituita da 1 tranne la diagonale che è nulla, ($a_{i\,j} = 1\,,\ \forall\, i \neq j\,,\ a_{i\,i} = 0\,,\ \forall\, i$), cioè $B = A - I$.

FORME QUADRATICHE

21. È data la matrice simmetrica $A \in M_{44}(\mathbb{R})$
   a. Scrivere la forma quadratica $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ associata ad A tramite la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
   b. Determinare il carattere di definizione di Q.
   c. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la matrice $A + aI$ è definita positiva.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

22. Scrivere in forma matriciale la forma quadratica $Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2kyz$ dipendente da $k \in \mathbb{R}$ e dire per ogni $k \in \mathbb{R}$ che carattere di definizione ha (usare criterio di Sylvester).

23. Data la forma quadratica $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.
$$Q(x,y,z) = kx^2 + 6xy + ky^2 + kz^2 + 8yz$$
   a. Scriverla in forma matriciale.
   b. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ è definita positiva, usando il criterio dei minori principali.

24. Studiare usando il teorema di inerzia di Sylvester il carattere di definizione e la segnatura degli autovalori delle matrici simmetriche A e B al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & k-4 & k-4 \\ 1 & k-4 & k-1 \end{pmatrix}$$

25. Determinare il carattere di definizione delle seguenti forme quadratiche definite su $\mathbb{R}^3$, scegliendo ogni volta il metodo più opportuno.

a. $x^2 + y^2 + xy$ b. $x^2 + 2xy + y^2 + z^2$ c. $xy + xz + yz$
d. $x^2 + yz$ e. $3x^2 - y^2$ f. $y^2 + z^2 - xy$
g. $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz$ h. $x^2 + 4xy + 2y^2 + 2yz + 3z^2$ i. $x^2 + xy + xz - z^2$

26. Determinare il carattere di definizione della forma quadratica $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita a lato mediante una matrice *non simmetrica*.

$$Q(x, y, z) = (x\ y\ z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

FUNZIONI E SCRIPT IN MATLAB

01. Scrivere il listato di un file **funzione** MatLab **`alfa(x)`** che, dato un numero reale x dia come risultato la matrice p calcolata come segue:
Innanzitutto costruisca la matrice m così fatta:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} x & x+1 & x+2 & \cdots & \cdots & x+10 \\ \hline 1 & 0 & & 0 & x & x \\ 0 & 1 & & 0 & x & x \\ \cdots & \cdots & \ddots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & 1 & x & x \\ \hline x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 & \cdots & \cdots & (x+10)^2 \end{array}\right)$$

m è una matrice 11×11 in cui ci sono una sottomatrice identica 9×9 e una sottomatrice 9×2 tutta fatta di x.

Il risultato della funzione sarà una matrice p tale che $p^T \cdot (m^T m) \cdot p$ sia diagonale.

Spiegare perché una tale matrice esiste.

02. Scrivere il listato di un file **funzione** MatLab **`alfa(n)`** che, dato un numero intero positivo n dia come risultato la matrice x calcolata come segue:

Innanzitutto costruirà usando al più *un solo ciclo* **`for`** la matrice $n \times n$ così fatta:

$$m = \begin{pmatrix} n & n-1 & \cdots & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

In seguito costruirà la matrice $2n \times 2n$ seguente

$$p = I + \left(\begin{array}{ccc|ccc} n & 0 & \cdots & & & \\ 0 & n & \cdots & & m & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ \hline n & n & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ n & n & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right)$$

Il risultato sarà la matrice colonna x soluzione del sistema $px = [1\ 2\ 3\ ...\ 2n]^T$

03. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **`alfa(x,y)`** che ha come variabili di input due numeri reali x e y e come output la matrice costruita come segue:

Sia innanzitutto $$a = \left(\begin{array}{c|ccccc} 2 & x+2 & x+4 & x+6 & \cdots & x+20 \\ \hline x+2 & y & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+4 & 1 & y-1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+6 & 1 & 1 & y-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \ddots & \cdots \\ x+20 & 1 & 1 & 1 & \cdots & y-9 \end{array}\right)$$

Il risultato della funzione sarà la matrice a^{-1} se a è invertibile e la matrice nulla dello stesso ordine di a in caso contrario.

04. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **`alfa(x)`** che ha come variabile di input una matrice riga x e come output la matrice d costruita come segue:

Sia innanzitutto $$a = \left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline I & x' \end{array}\right)$$

Nella prima riga di a il vettore x seguito da 0
Nell'ultima colonna 0 e il vettore x'
In basso a sinistra una matrice identica.

Il risultato della funzione sarà la matrice diagonale $$d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ dove $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sono gli autovalori di $a + a^T$.

Se x non è una matrice riga, la funzione dovrebbe dare errore e arrestare l'esecuzione.

05. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **`alfa(v)`** che abbia come variabile di input un vettore riga $v = [x_1, x_2, ..., x_n]$ e come output la matrice colonna x costruita come segue:

Sia innanzitutto $$b = \left(\begin{array}{c|ccccc} x_1 & x_2 & & & & x_n \\ \hline x_2 & \boxed{x_2} & 0 & \cdots & 0 & x_n \\ & 0 & \boxed{\nwarrow} & \cdots & 0 & x_n \\ & & & \boxed{v} & & \\ & 0 & 0 & \cdots & \boxed{\searrow} & x_n \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{x_n} \end{array}\right)$$

La prima riga di b è v, la prima colonna è v^T, la diagonale è pure v. L'ultima colonna è riempita dall'ultima componente di v

Se il sistema lineare $b \cdot X = [1\ 1\ 1 \cdots 1]^T$ ha un'unica soluzione la matrice di output sarà la soluzione.
In caso contrario sarà la matrice nulla (dello stesso formato di X).

06. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **`alfa(v)`** che abbia come variabile di input un vettore riga v e come output la matrice a costruita come segue:

$a = v \cdot v^T + d$ dove (con n opportuno) d è la matrice diagonale seguente:

$$d = \begin{pmatrix} 1/n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/(n-1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(n-2) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La funzione deve controllare se effettivamente v è un vettore riga, sostituire v con la sua traposta se v è un vettore colonna e usare la prima riga di v se v è una matrice (usare comando **`warning`**)

07. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab denominata **`alfa(a)`** che abbia come variabile di input una matrice a e come output la matrice b fatta come segue:

Se a è rettangolare $b = \left(\begin{array}{cccc|c} & a & & & I \\ \hline 1 & 0 & 0 & ... & \\ 0 & 2 & 0 & ... & a^T \\ 0 & 0 & 3 & ... & \\ ... & ... & & ... & \end{array}\right)$ Se a è quadrata $b = \left(\begin{array}{cccc|ccc} & a & & & & a^T & \\ \hline 1 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 3 & ... & & & \\ ... & ... & & ... & 0 & ... & 0 \end{array}\right)$

08. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **`alfa(v)`** che abbia come variabile di input v. Se v è un vettore riga $v = [x_1, x_2, ..., x_n]$ l'output sarà la matrice colonna a costruita come segue:

Consideriamo innanzitutto la matrice quadrata

$$m = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & ... & x_{n-1} & x_n & x_1 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ad esempio, se si avesse $v = [1\ 4\ 6\ 7\ 8]$, la matrice m sarebbe $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice di output sarà la colonna degli autovalori della matrice $m \cdot m^T$.
Se v è vettore colonna, come sopra, ma usando v^T.

Se v è una matrice né riga né colonna come output si avranno gli autovalori della matrice $v \cdot v^T$

09. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **`alfa(a,b,n)`** (a, b numeri reali, n numero intero ≥ 4). Il risultato sarà la matrice $n \times n$ fatta come segue:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} a & ... & a & ... & a \\ a+1 & ... & a & ... & a \\ \hline ... & ... & b & ... & 0 \\ ... & b+1 & & \ddots & \\ ... & b & 0 & ... & b \end{array}\right)$$

Per esempio **`alfa`**$(3, 7, 6)$ darebbe come risultato la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 12 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 11 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 7 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

10. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab denominata **`alfa(a)`**.
Il file funzione avrà come variabile di input un numero reale a e come output la tabulazione della funzione $f(x) = \dfrac{a+x}{x^2+1}$ nell'intervallo $[0, 2]$ con passo 0.1.

La tabulazione consisterà in una matrice di due colonne. Per esempio, se $a = 1$, sarà così strutturata: $\begin{pmatrix} 0 & 1.0000 \\ 0.1000 & 1.0891 \\ 0.2000 & ... \\ ... & ... \\ 2.0000 & 0.6000 \end{pmatrix}$

Inoltre verrà disegnato il grafico della funzione nell'intervallo dato.

11. Scrivere il listato di una file funzione MatLab **`alfa(n)`** avente come input un numero intero n e come output la matrice $n \times n$
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & ... & 2n-4 & 2n-2 & 2n \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & ... & 3 & 2 & 1 \\ \pi & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & e & e \\ 0 & \pi & 0 & 0 & ... & 0 & e & e \\ 0 & 0 & \pi & 0 & ... & 0 & e & e \\ 0 & 0 & 0 & \pi & ... & 0 & e & e \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \pi & e & e \end{pmatrix}$$
Se n non è un numero intero o è minore di 4 la funzione darà errore e non verrà eseguita.

12. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **`alfa(n)`** che abbia come variabile di input un numero n e come output la matrice a costruita come segue:

Se $n \geq 3$ poniamo $m = [n]$ (parte intera), se invece $n < 3$, poniamo $m = [6-n]$ (sempre parte intera).
Il risultato sarà la matrice
$$a = \left(\begin{array}{ccccc|c} m & m-1 & ... & ... & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 2^2 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 3^2 \\ & & \ddots & & & ... \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & \\ n & 0 & & 0 & 1 & m^2 \end{array}\right)$$

13. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **`alfa(x)`** che abbia come variabile di input una matrice x e come output la matrice a costruita come segue:

Se x non è un vettore con una sola riga, ma una matrice, il risultato sarà la matrice stessa e verrà emesso un avviso (comando **`warning`**).
Se invece x è un vettore riga $[x_1, x_2, ..., x_n]$, il risultato sarà la matrice
$$a = \left(\begin{array}{ccc|cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & ... & ... & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & ... & ... & x_n & x_1 & x_2 \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & x_{n-3} & ... & ... & x_3 & x_2 & x_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & n & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & n & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & n & n & ... & n & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & n & ... & n & n & n \end{array}\right)$$

14. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab
Il file funzione **`alfa(x,n)`** avrà come variabili di input un numero reale x e un numero intero $n \geq 3$ e come output la matrice costruita come segue:

Sia innanzitutto $$a = \left(\begin{array}{c|cccc} x & x^2 & x^3 & \cdots & x^n \\ \hline n & & & & \\ ... & & I_{n-1} & & \\ n & & & & \end{array}\right)$$
Il risultato della funzione sarà il numero 1 se la matrice a ha tutti autovalori reali, sarà 0 in caso contrario.

15. Scrivere il listato di due files MatLab : un file *funzione* e uno script
• Il file funzione **`alfa(z,n)`** avrà come variabili di input un numero reale z e un numero intero $n \geq 4$ e come output una matrice b costruita come segue.
Il file deve creare innanzitutto il vettore $1 \times n$ così fatto:
$v = (z, z+1, z+2, \cdots, z+n-1)$
e poi costruire la matrice $a = 2\,\dfrac{v^T \cdot v}{\| v \|} - I$ (I identica).
La matrice b di output sarà la matrice 4×4 costituita dalle prime 4 righe e colonne di a.
NB: opzionalmente il file può controllare che n sia effettivamente un numero intero e maggiore o uguale a 4 e dare errore in caso contrario.

• Lo script esaminerà la matrice b ottenuta dalla funzione precedente per $n = 5$ e $z \in [0, 5]$ (con passo 0.1), risolverà il sistema lineare $bx = [1\ 1\ 1\ 1]^T$ e scriverà su schermo la soluzione x solo nel caso in cui $\mid x \mid > 1$.

16. Scrivere il listato di **due** files MatLab : un file *funzione* e uno di tipo script
   • Il file funzione **`alfa(x,n)`** avrà come variabili di input un numero reale x e un numero intero $n \geq 3$ e come output la matrice b che contiene una sottomatrice $(n-2) \times (n-2)$ tutta fatta di x.

$$b = \begin{pmatrix} n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & x & \cdots & x & 2 \\ n-2 & x & \cdots & x & 3 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 2 & x & \cdots & x & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

   • Prima di calcolare b il file controllerà se effettivamente $n \geq 3$ e se è intero. Se $n < 3$ darà errore e interromperà il calcolo; se n non è intero lo sostituirà con la sua parte intera.

   • Lo script esaminerà la matrice b ottenuta dalla funzione precedente per $n = 5$ e $x \in [0, 5]$ (con passo 0.1), ne calcolerà il massimo autovalore λ e lo scriverà su schermo nel caso in cui $12 >| \lambda |> 10$.

17. Scrivere il listato di due files MatLab : un file *funzione* e uno script
   • Il file funzione **`alfa(x,n)`** avrà come variabili di input un numero reale x e un numero intero $n \geq 3$ e come output la matrice $n \times n$ costruita come segue:
   Sia innanzitutto b la matrice $2 \times n$ così fatta:
   $$b = \begin{pmatrix} x & x-0.1 & x-0.2 & \cdots \\ x \cdot e^x & (x-0.1) \cdot e^{x-0.1} & (x-0.2) \cdot e^{x-0.2} & \cdots \end{pmatrix}$$
   La matrice di output sarà $b^T \cdot b + I$

   • Lo script esaminerà le matrici ottenute per $n = 5$ e $x \in [0, 3]$ (con passo 0.1) per stabilire quale abbia il determinante più piccolo.

18. Scrivere il listato di due file *script* MatLab
   1. Uno script che esamini ogni matrice del tipo $a = \begin{pmatrix} 2 & 2 & k \\ 2 & 3 & k^2-2 \\ k & k^2-2 & 3 \end{pmatrix}$ con $k \in [-3, 3]$ (ovviamente non tutte, usare il passo 0.1) e scriva su schermo il k se tutti gli autovalori sono positivi.
   2. Uno script che tracci, usando il passo 0.01, il grafico della funzione
   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2+1} & \text{se } x \in [0, 1] \\ e^{1-x^2} & \text{se } x \in [1, 2] \end{cases}$$

19. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **`alfa(a,n)`** che, dati due numeri a, n costruisca come vettore riga la successione ricorsiva così definita $\qquad a_{i+1} = a_i^2 - 1$

   La successione avrà lunghezza n e inizierà con $a_1 = a$.

   Per esempio, con $a = 2$, $n = 4$, il risultato sarebbe il vettore 2 , 3 , 8 , 63.
   Prima di essere eseguita la funzione dovrà controllare che n sia effettivamente un numero intero e maggiore o uguale a 4 e che a sia uno scalare e dare errore in caso contrario.

20. Scrivere il listato di un file *funzione* MatLab **`alfa(v,w)`** che, dati due vettori riga v, w calcoli il seguente vettore:
   Se v e w hanno la stessa lunghezza il risultato sarà il vettore $\dfrac{v}{| v |} + \dfrac{w}{| w |}$.
   Se v è piu lungo di w, calcoli il vettore v_1 ottenuto eliminando le ultime componenti di v, in modo che abbia la stessa lunghezza di w e dia come risultato $\dfrac{v_1}{| v_1 |} + \dfrac{w}{| w |}$.
   Analogamente se w è piu lungo di v. Prima di essere seguita la funzione controllerà che v e w siano effettivamente vettori riga e darà errore in caso contrario.
   Dovrà inoltre controllare che né v né w siano il vettore nullo e dare errore in caso contrario.